

Seismic analysis of masonry voussoir arches according to the Italian building code

Francesco Pugi*, Stefano Galassi**

SUMMARY – *This paper is addressed to construction professionals, engineers and architects entrusted to assess the seismic vulnerability level of historical and architectural heritage buildings and to ensure their safety. Masonry building collapses caused by seismic events highlight frequent cases of loss of equilibrium, that is, the rigid overturning of structural portions. The study of collapse mechanisms can be effectively performed using the kinematic analysis methods, recently adopted by the Italian Building Code. Referring to a particular structural element (the masonry arch), a typical component of historic buildings, this paper proposes an original approach to perform seismic verification based on an algorithm devoted to this topic. Thanks to this algorithm, the a-priori choice of failure interfaces is avoided, as it is possible to individualize the kinematism and its related collapse load factor. The seismic verification which follows is performed according to the Italian Building Code.*

Keywords: *seismic vulnerability, linear kinematics, masonry, voussoir arches, existing constructions, building code*

1. Introduction

The Current Italian Construction Regulation (DM Infrastrutture January 14th, 2008 hereafter referred to as NTC) which came into force with Circular No. 617, 2 February 2009, proposes, in the case of existing masonry buildings, correlating the study of local collapse mechanisms to global seismic analysis.

“In masonry buildings partial collapses caused by earthquakes often occur, generally due to the loss of equilibrium in some parts of the masonry structure [...]. Safety verification of the structure considering the local damage and collapse mechanisms, can be performed by the limit analysis of equilibrium, using the kinematic approach, which is based on the choice of the collapse mechanism and the assessment of the horizontal action which activates that mechanism. The employment of the verification method requires, therefore, the analysis of local mechanisms considered to be significant to the construction, which can be hypothesized [...]” based on the knowledge level of the building. Chapter C8A.4 of Circular 617/2009 of the Italian Building Code (NTC 2008) inserts into the Italian Seismic Code the kinematic analysis method (also known as collapse mechanisms analysis) as an instrument to locally analyse existing masonry structures.

The school of thinking from which this kind of approach comes from, which, beginning from the earlier OPCM 3431/2005 [Consiglio dei Ministri, 2005] diverges considerably from past codes, originates from the awareness of legislators that a historical masonry building, in the case of an earthquake, has a different behaviour than a new one. A critical reading of the damages suffered by historical buildings as a result of

seismic events has highlighted phenomena of masonry portions collapse due to the loss of the monolithic behaviour of the construction itself. This is the reason why the seismic performance of a building should, first of all, be evaluated considering the stability of the equilibrium based on the identification of all collapse mechanisms kinematically compatible (that is to say possible) to be prevented, and, secondly, the overcoming, when significant, of the limit strength values offered by the constitutive material.

The authors quite agree with the fundamental ideas of the legislators and that there is a need to evaluate both the seismic performance and the level of vulnerability of a historical construction mainly referring to the statics of the equilibrium of rigid blocks and to the definition of feasible collapse mechanisms, on which to propose suitable calculation models.

2. The Rigid Voussoir Arch: an Introductory Example

The potentialities of the employed methodology may be highlighted by referring to a simple introductory example, here described, to be used as a guided-tutorial for a generalized application.

Let us consider the circular fixed-end arch on the abutments, illustrated in Fig. 1.

The simplified mathematical model of this arch consists of four equal voussoirs, with a circular outline, connected by internal fixed constraints in correspondence to the interfaces. In such interfaces dislocations can occur in the case in which the thrust line is prone to come out of the arch's profile due to the applied loads. This procedure will be explained in detail later in this paper. In this example, the voussoir weight is 11.24 kN and, to simplify the exposition, is the only applied load. The degree of static indeterminacy structures of this type is equal to 3 (notwithstanding the

* AEDES Software, 56028, San Miniato (PI), ITALY, info@aedes.it

** Department of Architecture, University of Florence, 50121 Firenze (FI), ITALY, stefano.galassi@unifi.it

The analysis of the vulnerability and of the seismic behaviour of such a structure, first of all, consists of the *prediction* of the collapse mechanism which may occur in the presence of external actions. Under the assumption of a rigid body and a material which is infinitely strong under compression, the collapse mechanism is a function of the earthquake and of the number of blocks composing the structure. Regarding this, Leon Battista Alberti wrote: “...*since in every body the added and naturally joined part is less divisible than the manually joined and linked one*” [Alberti, trans. Orlandi, 1966]; therefore, one can immediately deduce that in the case of real structures the number of mechanisms which may be activated is a function of the number of voussoirs, or more properly, the number of interfaces along which the dislocations may occur.

3.1. The collapse load factor

Let us leave aside, for a moment, the choice of the collapse mechanism which the earthquake is able to activate, and let us hypothesize that we have already identified, among the feasible compatible collapse mechanisms, the most probable one or, in any case, the only one actually possible. Such a collapse mechanism is represented in Fig. 2, and it is able to move voussoirs n° 1, 2, 3, while the fourth one remains immobile on the left springing impost.

The diagram shows a semi-circular arch bridge supported by two pillars. The arch has a radius of 250 units. Four vertical loads, each labeled P_i with $i = 1, 2, 3, 4$, are applied downwards at points along the arch. Each load has a magnitude of 11.24. The horizontal distance between the centers of the two pillars is 500 units. The vertical height from the base of the pillars to the top of the arch is 238.8 units. The horizontal distance from the centerline to the first support is 98.9 units. The vertical distance from the base of the pillar to the point where the arch meets the pillar is 40 units.

Fig. 1. *Masonry Voussoir Arch*.
Arco a conci in muratura.

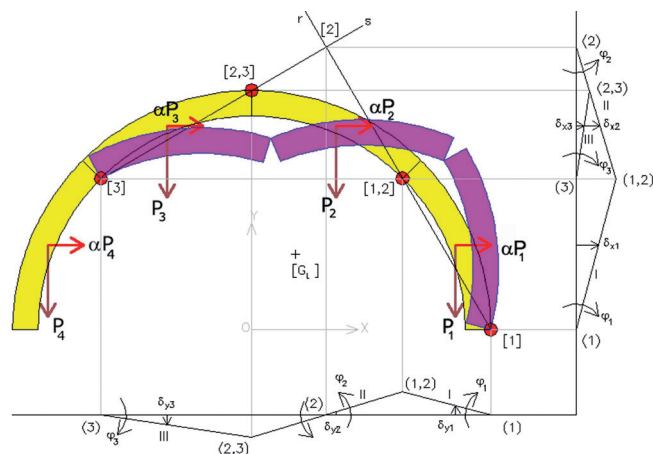


Fig. 2. *Predicted Collapse Mechanism and kinematic chain.*
Meccanismo di collasso previsto e catena cinematica.

Considering Fig. 2, all the seismic forces proportional to the weights of the voussoirs will be computed and they will be augmented, little by little, as the value of the proportionality coefficient α (*load factor*) increases. Once the coefficient α has reached the value which activates the predicted mechanism, it will become the *collapse load factor*, called α_0 by NTC.

In the case of existing buildings of historical interest, the NTC only requires that such buildings, under seismic actions, do not collapse and ensure life

safety, even if such buildings are not required to have the same safety levels as new constructions. For this reason, only seismic verification of the Ultimate Limit State is required for buildings of historical interest (ULS refers to both a Collapse Limit State (referred to as SLC) and Life Saving Limit State (referred to as SLV)) eliminating the need to verify the Serviceability Limit State (SLS).

The collapse mechanism which has been hypothesized in the introductory example is the typical flexural mechanism, historically proposed by Couplet in the 18th Century [Couplet, 1731, 1732]. Such a mechanism is activated by the opening of four cylindrical hinges alternated along the intrados and extrados outline of the arch which provoke the relative rotation of a voussoir over another, pivoting on the hinge points.

The NTC defines the cylindrical hinges between the blocks of the arch as “the lines of the constraint between the blocks involved in the kinematism”.

Although it is not the only feasible mechanism [D'Ayala *et al.*, 2012], many authors [De Lorenzis *et al.*, 2007; O'Dwyer, 1999] consider the flexural mechanism a rather realistic seismic failure mode of an arch, if the problem is treated in terms of limit analysis according to the well-known hypotheses suggested by J. Heyman [Heyman, 1982, 1995] about the definition of the domain of admissibility of masonry material, that is:

- infinite compressive strength, with the consequent impossibility to activate crushing phenomena (hypothesis justified by the fact that the level of compression is generally low in an arch);
- zero tensile strength (hypothesis deduced by the fact that in a historical construction mortar properties suffered a decay process with the passing of time);
- infinite sliding strength of the voussoirs along the interfaces (hypothesis justified by the fact that the shear force along the joints, responsible for the sliding of the blocks, is low if compared to the compressive one; this hypothesis is deduced by observing that the shape of the thrust line, for it to be entirely contained within the arch's profile in order to guarantee the equilibrium, must not be very different from the shape of the geometrical line of the arch, according to the Limit Analysis Static Theorem, must not be very different from the shape of geometrical line of the arc).

As regards to the friction phenomenon of the interfaces, Heyman's original theory disregarded sliding verification. The proposed methodology, instead, can also take into consideration sliding failures, as evidenced in section 5 of this paper. The simple introductory example (Fig. 2), however, refers to the mechanism activated by hinge openings developed as a consequence of tensile failures. In the case in which the local sliding collapse occurs at values lower than those that activate hinge openings, the collapse load factor corresponds to a structure in which the mechanism is not fully activated and the Ultimate Limit State is achieved when the local sliding of a voussoir along an interface occurs.

In accordance with §C8A.4 of Circular 617/2009 to the NTC, when carrying out a collapse mechanism analysis of existing buildings, Heyman's hypotheses regarding infinite compressive strength, no-tension

strength and infinite shear strength, should be considered as a benchmark.

To compute the value of the collapse load factor activating the predicted kinematism numerically, it is necessary to formulate an *equilibrium equation* which describes that such a mechanism may not occur in case of an earthquake. Such an equation is called a *kinematic chain equation*, or more commonly, *equation of virtual works*, according to which all the real forces F^r applied to the structure (vertical loads and horizontal seismic actions) perform work for the virtual displacements s^f of their points of application (centres of gravity of the blocks). To prevent the activation of the collapse mechanism, the total work of all the system of forces must be zero:

$$L_v = F^r \cdot s^f = 0 \quad (1)$$

Equation (1) needs the a-priori definition of the displacements δ_x and δ_y of the points of application of the forces. So it is necessary to describe the kinematic chain by means of defining the absolute and relative centres of rotation and the drawing of the diagrams of the horizontal and vertical displacements of the voussoirs of the structure beginning from an arbitrary value of the displacement of any point or of the rotation of a voussoir (Fig. 2). In the case of the structure under study, the rotation φ_1 of the first voussoir has been assumed as the arbitrary value.

The location of the absolute centres of rotation 1 and 3 are known, as they coincide with the former and the latter hinge of the mechanism. The location of the relative centres 1,2 and 2,3 are also known, as they coincide with the position of the internal hinges.

The coordinates of the absolute centre 2 may be obtained from the intersection between the straight line r (passing through centres 1 and 1,2) and the straight line s (passing through centres 2,3 and 3):

$$\begin{cases} \frac{y - y_1}{y_{1,2} - y_1} = \frac{x - x_1}{x_{1,2} - x_1} \\ \frac{y - y_{2,3}}{y_3 - y_{2,3}} = \frac{x - x_{2,3}}{x_3 - x_{2,3}} \end{cases} \quad (2)$$

Once the horizontal and vertical displacements have been plotted in Fig. 2, it is possible to compute the displacements of the points of application of the forces as a function of each voussoir rotation i (in other cases, a rigid portion of adjacent blocks) on which such forces are applied:

$$\begin{cases} \delta_{xi} = \delta_{xi}(\varphi_i) \\ \delta_{yi} = \delta_{yi}(\varphi_i) \end{cases} \quad (3)$$

The chain equation to prevent the activation of the predicted collapse mechanism assumes the form:

$$L_v = \alpha \cdot P_1 \cdot \delta_{x1} + \alpha \cdot P_2 \cdot \delta_{x2} + \alpha \cdot P_3 \cdot \delta_{x3} + \\ - P_1 \cdot \delta_{y1} - P_2 \cdot \delta_{y2} - P_3 \cdot \delta_{y3} = 0 \quad (4)$$

In the introductory example, in which $P_1 = P_2 = P_3$, Equation (4) assumes the more simplified form:

$$\alpha \cdot (\delta_{x1} + \delta_{x2} + \delta_{x3}) - \delta_{y1} - \delta_{y2} - \delta_{y3} = 0 \quad (5)$$

By expressing all the displacements as a function of the only unknown φ_1 (kinematic variable), it is finally possible to compute the value of the collapse load factor. Therefore, in the introductory example:

$$\alpha_0 = 0.046 \quad (6)$$

3.2. Computation of seismic parameters

Once the collapse mechanism of the structure and the value of the collapse load factor capable of activating it have been computed, the next step is to compute the seismic parameters of the structure, that is the mass M^* participating in the kinematism and the spectral acceleration a_0^* which activates it.

The *participating mass* M^* may be determined by taking into consideration the virtual displacements of the application points of all weights $P_i = g \cdot M_i$, that are associated to the kinematism, as a modal shape of vibration (Equation C8A.4.3, Circ. n. 617/2009):

$$M^* = \frac{(\sum P_i \cdot \delta_{xi})^2}{g \cdot \sum P_i \cdot \delta_{xi}^2} \quad (7)$$

where P_i represent the vertical load whose masses, as a consequence of seismic action, trigger horizontal forces in correspondence to the portions of the kinematic chain, and δ_{xi} are the virtual displacements of their points of application in horizontal direction.

Since such displacements, expressed by System (3), are expressed as a function of the arbitrary displacement parameter φ_1 , they will be numerically computed using the assumed value 1:

The introductory example provides:

$$M^* = 2966.1 \text{ kg} \quad (8)$$

The *spectral acceleration* which activates the mechanism is finally obtained through the following relationship (Equation C8A.4.4, Circ. n. 617/2009):

$$a_0^* = \frac{\alpha_0 \sum P_i}{M^*} \quad (9)$$

Therefore, in the introductory example:

$$a_0^* = 0.053 \text{ g} \quad (10)$$

According to the present building code (and as also provided in Eurocode 8: “Seismic Design of Buildings”), which has adopted a probabilistic approach in place of the earlier deterministic one, it is required to lower the spectral acceleration value, capable of activating the kinematism, using the *partial safety factor* based on the *knowledge level* of the structure determined by the professional in relation to the geometry, details and materials. Such a coefficient is called *confidence factor* F_c , and it assumes the three values listed in Table 1.

In this sense, the Equation (9) is replaced with Equation (11) (Equation C8A.4.4, Circ. n. 617/2009):

Tab. 1. *Knowledge Levels (KL) and confidence factors (F_c).*

KL	F_c	Knowledge
1	1.35	Limited
2	1.20	Extended
3	1.00	Comprehensive

$$a_0^* = \frac{\alpha_0 \sum P_i}{M^* \cdot F_c} \quad (11)$$

In the introductory example, assuming the professional only has limited knowledge of the structure (KL_1), the spectral acceleration, previously computed, must be lowered dividing it by the coefficient 1.35; so the lower spectral acceleration value is:

$$a_0^* = \frac{0.053 \text{ g}}{1.35} = 0.039 \text{ g} \quad (12)$$

In any case, independently of the knowledge level of the structure, the Italian Building Code requires that in all cases in which infinite strength compression has been assumed to compute the collapse load factor, the KL_1 confidence factor must be used (§C8A.4.2.2, Circ. 617/2009).

4. Seismic Safety Verification

Seismic analysis of an existing masonry building, using the linear kinematics method, is concluded with a safety verification which will determine whether or not a structure is capable of supporting an earthquake.

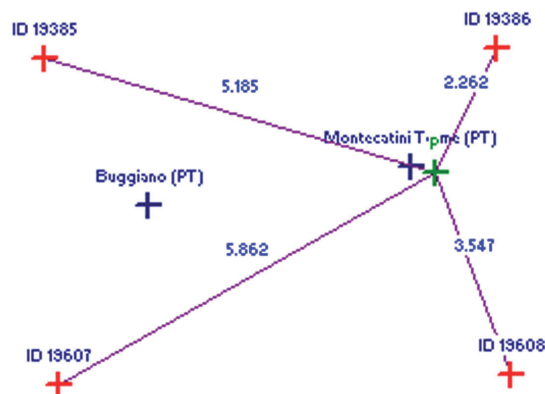
The verification test is based on the direct comparison between the *seismic capacity* of the structure and the *seismic demand* required by the building code. In the above case, in accordance with Circ. n. 617/2009, the test is based on the comparison between the spectral acceleration a_0^* capable of activating the mechanism and the spectral acceleration defined by the *NTC*.

This latter one (representative of the intensity of the seismic event) will damage the assigned structure, which is assumed to be located inside a building such as a multi-storey building, depending on its height from the foundation plan. As it is known, in fact, the effect of an earthquake on a multi-storey building, is greater on the higher floors than on the ground floor. For this reason, the regulation proposes two distinct formulas to compute the demanded spectral acceleration: a_1^* refers to an acceleration coincident with the seismic input on the ground floor while a_2^* refers to a higher position of the macro-element over an underlying deformable structure, so that it is always $a_2^* > a_1^*$.

The spectral acceleration on the ground floor is obtained through the formula (Equation C8A.4.9, Circ. n. 617/2009):

$$a_1^* = \frac{a_g \cdot S}{q} \quad (13)$$

while the one on a certain level a_2^* is obtained by defining the elastic response spectrum $S_e(T)$ (Equation C8A.4.10, Circ. n. 617/2009):



Sito di ubicazione dell'edificio:
 Longitudine = 10.774700, Latitudine = 43.884540

Vertici della maglia elementare del reticolo di riferimento contenente il sito:
 1: ID 19607: Longitudine = 10.717020, Latitudine = 43.852140
 distanza dal sito (km): 5.862
 2: ID 19385: Longitudine = 10.714760, Latitudine = 43.902110
 distanza dal sito (km): 5.185
 3: ID 19386: Longitudine = 10.784120, Latitudine = 43.903720
 distanza dal sito (km): 2.262
 4: ID 19608: Longitudine = 10.786330, Latitudine = 43.853760
 distanza dal sito (km): 3.547

Risultano 2 Comuni compresi nella maglia:
 Buggiano (PT): 10.730833, 43.879722
 Montecatini Terme (PT): 10.770833, 43.885556

Fig. 3. Mesh defined by four nodes around the site of the introductory example building.
 Reticolo intorno al sito di ubicazione dell'edificio dell'esempio introduttivo.

$$a_2^* = \frac{S_e(T_1) \cdot \psi(Z) \cdot \gamma}{q} \quad (14)$$

In Equations (13) and (14) it is defined:

- a_g : reference horizontal peak ground acceleration (PGA) expected at the site of the construction, idealized because it refers to rock type ground conditions with a horizontal topographic surface (ground type A, as defined in §3.2.2, NTC 2008), which the seismologists have computed in 10,751 sites and in correspondence to 9 reference return periods of the seismic action (30 years, 50 years, 72 years, 101 years, 140 years, 201 years, 475 years, 975 years, 2,475 years); this is the reason why, in the arch of the introductory example, a_g will have to be computed exactly in correspondence to the construction site and the estimated return period (a_g is given by NTC; Enclosure B provides a table which defines the parameters a_g , F_0 , T_c^* of the seismic action);
- S (soil factor): a coefficient which modifies (that is to say: makes real) the reference acceleration a_g in order to take into account the actual foundation soil (probably neither rigid nor horizontal) and whose value is $S = S_s \cdot S_T$; according to this equation it is a function of both the stratigraphic S_s and the topographic S_T "compensating" factor (Table 3.2.II, Table 3.2.III, Table 3.2.IV, NTC 2008);
- q : structural behaviour factor, which can be defined as the ratio between the elastic loads and the ultimate design loads; in this case it may be assumed to be equal to 2;
- $S_e(T_1)$: spectral ordinate (as defined in §3.2.3.2.1, NTC 2008), at the fundamental period of building vibration T_1 , with $T_1 = C_1 \cdot H^{3/4}$ and $C_1 = 0.050$ in the case of any masonry building (Equation 7.3.5, NTC 2008);
- $\psi(Z)$: fundamental mode of vibration of the building along the reference direction, normalized to 1 at the top of the building; when accurate evaluations are lacking, the Circular to the Italian Building Code

(§C8A.4.2.3, Circ. 617/2009) suggests one to assume: $\psi(Z) = \frac{Z}{H}$, where H is the total height of the building measured from the foundation soil and Z the height of the geometric centre of gravity of the constraint lines which separate the blocks affected by the kinatism from the part of the structure which remains stationary.

In the case of an arch which transforms into a flexural collapse mechanism, the above mentioned constraint lines must coincide with the axes of the first and the fourth cylindrical hinge of the mechanism. In this way, it is clear that Z is the height, taken from the foundation soil, of the geometrical centre of mass of such axes (in Fig. 2, Z is the quote of point G_L);

- γ : modal participation factor; the Circular to the Italian Building Code (§C8A.4.2.3, Circ. 617/2009), when accurate evaluations are lacking, allows it to be computed as a function of N where N is the number of building storeys: $\gamma = \frac{3N}{2N+1}$.

To perform the seismic safety verification, the seismic site hazard of the building must be defined. The arch structure is assumed to be inside an ancient farmhouse used as a residence located in the town of Montecatini Terme (PT), Italy, on a very compacted soil (ground type B) and with a low ground slop (topography T_2). Since seismic hazard is site-dependent, first, it is necessary to localize the thermal town of Montecatini Terme inside the reference grid using its geographic coordinates: LONG = 10.774700; LAT = 43.884540. This site, as was indeed expected, is not one of the 10,751 sites included in the table of the national territory sites surveyed by seismologists. So, the coefficients that identify its seismic hazard are not immediately available (seismic hazard of a site is assessed by the three above mentioned coefficients: a_g , F_0 , T_c^*).

By using an interpolation procedure based on the exact position of the site of the example building within the reference grid (Fig. 3) and the estimated

return period, as suggested by the NTC (Enclosure A, NTC 2008), the spectral parameters, computed in correspondence to a return period of 475 years, are:

$$a_g = 0.138 \text{ g}, \quad F_0 = 2.414, \quad T_C^* = 0.294 \text{ sec} \quad (15)$$

The return period of 475 years corresponds to a reference life of 50 years and a 10% probability P_{VR} of exceedence associated to the Ultimate Limit State.

The spectral parameters a_g , F_0 , T_C^* have to be “adjusted” to conform to the actual foundation soil at the site, as they were obtained under the assumption of a rigid (ground type A) and horizontal (topography T_1) soil. Considering the actual foundation soil, whose descriptive parameters are listed in Table 2, the “compensating” coefficient is obtained, that is the soil factor S :

$$S = S_S \cdot S_T = 1.20 \cdot 1.2 = 1.44 \quad (16)$$

According to Equation (13), the ground acceleration, required by the NTC, of the introductory example structure located on the ground floor of the building, is:

$$a_1^* = \frac{a_g \cdot S}{q} = \frac{0.138 \text{ g} \cdot 1.44}{2} = 0.099 \text{ g} \quad (17)$$

Instead, to compute the absolute acceleration, demanded by the NTC in cases where the structure is located on a higher floor of a deformable building, coefficients have to be preliminarily calculated. In the introductory example building, said coefficients are listed in Formulas (18):

$$\begin{aligned} H &= 2.80 + 3.00 + 0.40 = 6.20 \text{ m} \\ T_1 &= C_1 \cdot H^{3/4} = 0.050 \cdot 6.20^{3/4} = 0.196 \text{ sec} \\ y_{GL} &= \frac{\sum l_i \cdot y_i}{\sum l_i} = \frac{1.00 \cdot 1.7677 + 1.00 \cdot 0}{1.00 + 1.00} = 0.884 \text{ m} \\ Z &= 0.40 + 3.00 + y_{GL} = 3.40 + 0.884 = 4.28 \text{ m} \quad (18) \\ \psi(Z) &= \frac{Z}{H} = \frac{4.28}{6.20} = 0.690 \\ \gamma &= \frac{3N}{2N+1} = 1 \end{aligned}$$

Finally, to diagram the elastic response spectrum (Fig. 4), the abscissas of the three corner points among the four branches of the spectrum have to be computed. In the introductory example building, they are listed in Formulas (19):

$$\begin{aligned} C_C &= 1.10 \cdot (T_C^*)^{-0.20} = 1.10 \cdot (0.294)^{-0.20} = 1.405 \\ T_C &= C_C T_C^* = 1.405 \cdot 0.294 = 0.413 \text{ sec} \\ T_B &= \frac{T_C}{3} = 0.137 \text{ sec} \\ T_D &= \frac{4.00 a_g}{6} + 1.6 = \\ &= \frac{4.00 \cdot 0.138 \text{ g}}{6} + 1.6 \text{ sec} = 2.152 \text{ sec} \end{aligned} \quad (19)$$

Tab. 2. Foundation soil parameters of the introductory example building.

	Description of stratigraphic profile	Ground Type	Parameters
Subsoil	Very compacted soils	B	$S_S = 1.20$
Topography	Ground slope angle $> 15^\circ$	T_2	$S_T = 1.2$

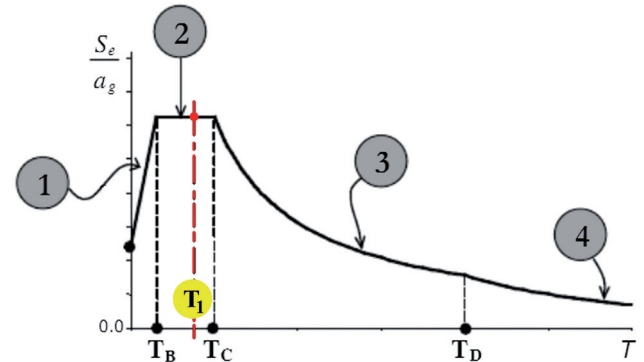


Fig. 4. Horizontal elastic ground acceleration response spectrum (NTC 2008).

Rappresentazione schematica dello spettro di risposta elastico in accelerazioni delle componenti orizzontali del sisma (NTC 2008).

Since the fundamental period of vibration of the introductory example structure ($T_1 = 0.196 \text{ sec}$) lies inside the range $T_B - T_C$, $S_e(T_1)$ is computed by substituting the value T_1 into the equation of the second branch (the horizontal one) of the spectrum:

$$\begin{aligned} S_e(T_1) &= a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 = \\ &= 0.138 \text{ g} \cdot 1.44 \cdot 1 \cdot 2.414 = 0.480 \text{ g} \end{aligned} \quad (20)$$

Referring to Equation (14), the absolute acceleration of the introductory structure on a higher floor (location quote of the arch under study) is equal to:

$$\begin{aligned} a_2^* &= \frac{S_e(T_1) \cdot \psi(Z) \cdot \gamma}{q} = \\ &= \frac{0.480 \text{ g} \cdot 0.690 \cdot 1.0}{2} = 0.166 \text{ g} \end{aligned} \quad (21)$$

To satisfy the seismic safety verification for SLV, the spectral acceleration capable of activating the mechanism must be equal to or greater than the seismic acceleration required by NTC and computed in correspondence to the site of the building, as described in Equation (22):

$$a_0^* \geq \max \{a_1^*, a_2^*\} \quad (22)$$

In this specific case it is:

$$0.039 \text{ g} < \max \{0.099 \text{ g}, 0.165 \text{ g}\} \quad (23)$$

According to Equation (23), the seismic safety verification of the arch in the introductory example is not satisfied.

5. The Problem of Individualizing the Collapse Mechanism

The most crucial point of the seismic verification performed by the kinematic analysis is defining the collapse mechanism.

The choice of a suitable collapse mechanism allows one to perform a reliable assessment of the structure's seismic capacity and therefore, a correct estimation of its vulnerability which is based on the comparison between the seismic capacity and demand.

In the case of a monolithic wall (Fig. 5), rigid and infinitely strong, fixed to its base, the choice of the collapse mechanism is a mere banality: the only failure section is the soil-wall interface. The most feasible mechanism is due to its rigid overturning pivoting on a point (rotation hinge) placed in its base section, and may be activated as a consequence of the lack of transversal connections [D'Ayala *et al.*, 2011].

The exact position of the hinge along such an interface does not affect the type of mechanism [Munari *et al.*, 2010], but only the restoring moment produced by self-weight: one can assume it coincides with one of the extreme points of the section (infinite compressive strength assumption of the constitutive material) or an interior position point (i.e. according to an elastic-plastic behaviour).

Instead, when the structure is composed of several rigid and infinitely strong blocks (therefore, the blocks cannot break and only the interfaces between the blocks may be affected by feasible dislocations), the choice of the collapse mechanism could be performed by predicting all the modified configurations which are kinematically compatible (that is all the ones that exclude the only theoretically possible phenomenon of the interpenetration of the blocks).

Some authors [Baggio *et al.*, 1998, 2000; Block *et al.*, 2006; Smars, 2000] have proposed solutions for assessing the stability of masonry arches based on the mechanism approach. According to the *Kinematic Theorem of Limit Analysis*, the collapse load factor of a structure corresponds to the lowest collapse load factor obtained by the analysis of all the feasible collapse mechanisms that may occur. This path is rigorous. However, this kind of analysis requires very lengthy computational work, because it is necessary to consider a wide range of kinematic chains.

To turn this problem around, in this section of the paper a numerical procedure which follows another methodology is proposed: it computes the collapse load factor following the static procedure. Relying on the *Static Theorem of Limit Analysis*, the collapse load factor capable of transforming a structure into a kinematicism is the highest among all that assure the equilibrium of the structure (lower bound approach). Since the *Fundamental Theorem of Limit Analysis* states that the lower load factor obtained kinematically and the higher load factor obtained statically coincide, the choice of the methodology (static or kinematic) to compute its value is freely user-defined.

In this paper, the problem of individualizing the collapse mechanism which may be activated by an earth-

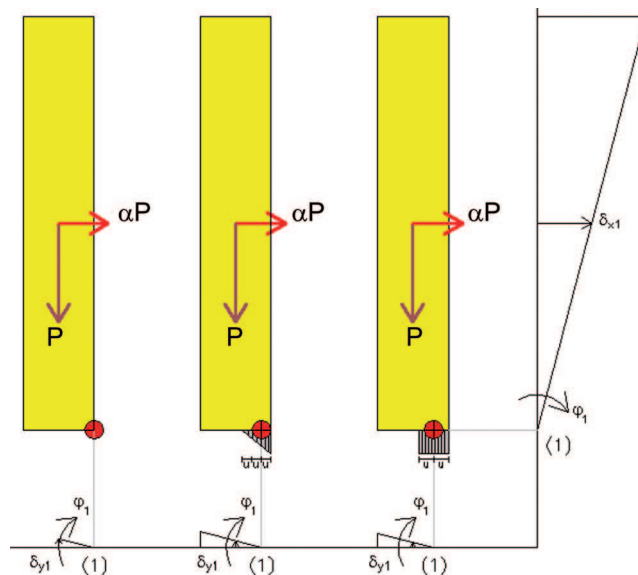


Fig. 5. Kinematic chain of a monolithic wall and the positions of the rotation hinge along the base section.

Cinematica di parete monolitica e posizioni della cerniera di rotazione nella sezione di base.

quake, is dealt with by the static approach and solved making use of an algorithm for the analysis of masonry structures made up of rigid blocks, connected by unilateral and frictional joints.

This algorithm, already described in earlier papers with the aim of evaluating the degree of stability of masonry structures subjected to vertical loads [Galassi *et al.*, 2004, 2012a] and localized settlements [Galassi *et al.*, 2011, 2013a], is being presented here, in updated form, to assess the seismic capacity of masonry voussoir arches by means of linear kinematics. In this way, it will be able to discover the four weakest sections which may undergo dislocations due to the opening of rotation hinges during the seismic event; however, the presence of a finite friction between the blocks is also assumed.

Thus, in this regard, let us consider an arch made of n rigid blocks linked through $m = n + 1$ interfaces modelled in a discrete manner with two links orthogonal to the interface and a third one tangentially arranged. The two links orthogonal to the interface are applied in correspondence to the intrados and the extrados point of the section respectively so as to transfer the normal force. The third one transfers the shear force (Fig. 6a). The interfaces are the only sections of the structure in which dislocations can occur and activate the collapse mechanism.

With the aim of computing the collapse load factor and individualizing the related flexural mechanism, caused by an earthquake, the links orthogonal to the interface are designed to transfer only compressive forces and, in the case of tensile forces, they crack, thus, individualizing the position of an opening hinge. When four opening hinges develop in four different sections, the structure instantaneously transforms into a collapse mechanism. Furthermore, to avoid the possibility of a local "shear type" failure (sliding), it is

necessary to limit the value of the shear force that the tangential link may transfer along the interface by adopting the well-known strength criterion proposed by Coulomb [Coulomb, 1776] in the 18th Century and which is described by the internal friction cone [Galassi *et al.*, 2012b].

If the shear force exceeds the limit friction force, even in only one interface, the flexural collapse mechanism will not be able to develop because the number of failure interfaces in an arch may not be more than four. If in one of the four failure sections a hinge does not open, as a consequence of the occurrence of an earlier local sliding failure, no flexural collapse mechanism will occur.

According to the above hypotheses, the structural problem, so defined, needs an algebraic formulation which assumes that the non-linearity (no-tension strength and limited shear strength) of the material is totally concentrated in the joints, exactly where the dislocations may occur (rotation, sliding).

The algebraic formulation (Fig. 6b), which governs the problem of a discrete system of rigid blocks connected by unilateral constraints, is thus composed of an equilibrium equation (plus an additional kinematic equation, which, for the purpose of this paper, does not necessarily have to be resolved) and a system of inequalities by which the non-linearity of the material can be described:

$$\begin{cases} AX = \alpha F \\ \tilde{A}X = \delta \end{cases}, \quad \text{sub} \quad \begin{cases} X_n \leq 0 \\ X_t \leq f \cdot \sum_{i=1}^2 X_{n_i} \\ \delta \geq 0 \end{cases}, \quad (24)$$

where:

- $[A]^{(3n \times 3m)}$ = equilibrium matrix which depends on the geometry of the arch;
- $[X]^{(3m \times 1)}$ = unknown vector whose coefficients represent the forces of the interface links;
- $[X_n | X_t]$ = sub-vectors of $[X]$ whose coefficients represent the normal and shear forces of the interface links;
- $[F]^{(3n \times 1)}$ = known load vector;
- α = load factor, which assumes the constant value 1 in correspondence to the coefficients of $[F]$ that simulate the vertical loads, and a variable value which increases until the activation of the collapse mechanism in correspondence to the coefficients of $[F]$ that simulate the horizontal seismic actions. This value is progressively increased: for each value of α , therefore at each step of the *progressive procedure*, the structure is analyzed by this algorithm and, therefore, the feasible hinges are searched for in correspondence to each specific α . Obviously, the number of hinges that develop, augment as the factors augment;
- f = friction coefficient;
- $[x]^{(3m \times 1)}$ = unknown vector of the voussoirs' centre of gravity displacements;
- $[\delta]^{(3m \times 1)}$ = unknown vector of *internal distortions* introduced in the system in order to obtain the solution capable of satisfying equilibrium equations while respecting the sign conditions expressed by the ine-

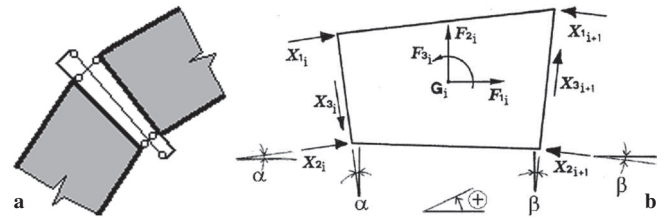


Fig. 6. (a) Mechanical model of an interface; (b) mathematic model. (a) Modello meccanico dell'interfaccia; (b) modello matematico.

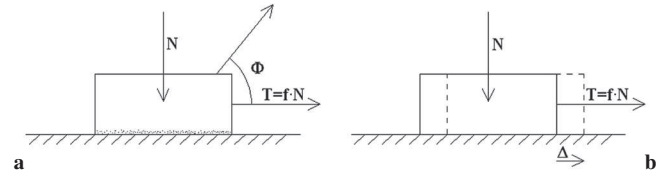


Fig. 7. (a) "Plastic-shearing" and (b) "sliding friction" behaviour. (a) Comportamento "plastic-shearing"; (b) comportamento "sliding friction".

qualities. A distortion is defined as an external action (but not a force) capable of modifying the original geometry of the structure, and, therefore, of producing internal forces in any hyper-static structure [Gatto, F. *et al.*, 1983].

Since the structure is hyper-static, the number of static unknowns (forces in the interface links), compared to the number of equilibrium equations, is greater than three. Therefore, to resolve the structural problem, it is necessary to define the compatibility conditions. However, since the material has been assumed to be rigid (i.e. not deformable), the compatibility of deformation equations cannot be written. Consequently, *the problem can only be solved in terms of equilibrium*.

To satisfy the non-linearity of the material, the set of distortions [Di Pasquale, 1998] are required to act on the internal forces whose sign do not satisfy the sign conditions expressed by the inequalities in System (24). More specifically, first the initial solution is obtained (described by the vectorial Equation (28)). Next, in the case in which a coefficient in the initial vector solution does not satisfy the inequalities in System (24), first, all the values of tensile forces in normal links are nullified, then those with a shear force greater than the limit friction force are limited. In the former case distortions δ are introduced in correspondence to the links orthogonal to the interface in order to nullify the tensile forces (this produces the development of an opening hinge on the interface); in the latter case distortions δ are introduced in correspondence to the tangential link to reduce the shear force until the value of the limit friction force is reached, thus preventing the sliding of the blocks ("plastic-shearing" behaviour suggested by Drucker [Gilbert *et al.*, 1994], and described in Fig. 7a). In any case, the maximum number of distortion terms that can be introduced in the system cannot be greater than the degree of static indeterminacy of the structure, according to the *Colonnetti's Theorem* [Colonnetti, 1955].

In general, a hyper-static problem (of degree $3m - 3n$), always allows ∞^{3m-3n} equilibrated solutions. In the specific case of the mathematical problem of the structural analysis of an arch, even if hyper-static, only one solution is allowed. This is due to the fact that distortions are introduced in the system to satisfy the inequalities that limit the value of the vector $[X]$ coefficients. Under these assumptions, it is possible the problem will not have a solution: in that case the arch is unstable and, therefore, a collapse mechanism has developed.

The solution of the problem expressed in System (24) may be obtained by choosing a solution among the ∞^{3m-3n} solutions, which satisfies some conditions or, in a certain sense, the best solution. Considering that system $AX = \alpha F$ allows the solution $X = G \cdot \alpha F$, if and only if, $AG \cdot \alpha F = \alpha F$, where $[G] \in R^{3m \times 3n}$ is a matrix that satisfies the condition $AGA=A$, the solution of System (24) is given by:

$$X = G \cdot \alpha F + (I - GA) \cdot \delta \quad (25)$$

where $[\delta]$ is an arbitrary vector of R^{3m} and $[I]$ is the identity matrix of order $(3m \times 3m)$.

Matrix $[G]$ is a generalized inverse of $[A]$ [Penrose, 1955]; usually it is not unique and therefore, it must be chosen using a certain criterion. Here the inverse matrix was chosen to provide the unique solution $[X_0]$ of minimal 2-norm such that:

$$\|X_0\|_2 = \min\{\|X\|_2 : AX = \alpha F = 0\} \quad (26)$$

The solution of minimal norm is unique [Paradiso *et al.*, 1992]. In this circumstance the solution of System (24) is given by:

$$X = X_0 + X_N \quad (27)$$

where $[X_0] \in R(G)$ and $[X] \in N(A)$.

The solution vector of minimal 2-norm is:

$$X_0 = \tilde{A}(\tilde{A}\tilde{A})^{-1}\alpha F \quad (28)$$

while:

$$X_N = (I - \tilde{A}(\tilde{A}\tilde{A})^{-1}\tilde{A}) \cdot \delta = C \cdot \delta \quad (29)$$

In Equation (29), $[\delta]$ is an arbitrary vector of R^{3m} , $[C] = (I - \tilde{A}(\tilde{A}\tilde{A})^{-1}\tilde{A})$ is the orthogonal projection of R^{3n} on $N(A)$ and $(I - \tilde{A}(\tilde{A}\tilde{A})^{-1}\tilde{A}) \cdot \delta$ is an arbitrary vector of $N(A)$.

The arbitrary vector $[\delta]$ is generalized here to compute $[X_N]$ which, when added to $[X_0]$, provides the vector $[X]$ that satisfies both the equations and the inequalities in System (24).

The numerical technique developed to solve such a problem, first of all, searches for the unknown distortions δ and then, consequently, vector $[X]$ may be computed. Thus, again writing Equation (27) partitioning all the vectors and matrices so as to distinguish the forces whose sign is acceptable (subscript b) from the unacceptable ones (subscript c), the following matrix expression is derived:

$$\begin{bmatrix} X_b \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ob} \\ X_{oc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b \\ \tilde{B} \end{bmatrix} \frac{B}{C_c} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_c \end{bmatrix} \quad (30)$$

The result of Equation (30) provides the effective distortions sub-vector coefficients $[\delta_c]$:

$$\delta_c = C_c^{-1}(L - X_{oc}) \quad (31)$$

In Equation (31) sub-vector $[\delta_c]$ is populated by the coefficients of the distortions sub-set that the structure requires, during the analysis, to restore the compatibility which the initial solution vector $[X_0]$ also can not satisfy. Therefore, it is introduced in the system in order to respect the non linear constraint of the material and is represented by the inequalities in System (24).

As a consequence, the complete distortion vector $[\delta]$ is:

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_c \end{bmatrix} \quad (32)$$

In conclusion, the final static solution vector is:

$$X_b = X_{ob} + BC_c^{-1}(L - X_{oc}) \quad (33)$$

In Equation (33) sub-vector X_b is populated by the coefficients of the internal forces not directly affected by the distortions action, but which have undergone numeric modifications as a consequence of the distortions applied in correspondence to other internal forces whose sign was not acceptable.

Under the assumption of brittle-rigid behaviour with regard to the normal force and rigid-plastic with regard to the shear force, coefficients of sub-vector $[L]$ presented in Equation (30) assume a value equal to zero in the former case and to $f \cdot \sum_{i=1}^2 X_{n_i}$ in the latter one.

The complete final static solution vector $[X]$ is, therefore, obtained by sub-vector $[X_b]$ in Equation (33) and sub-vector $[L]$.

In order to discover the collapse load factor and the relating mechanism that may be activated by the earthquake, the analysis must be executed many times (each time restarting from the beginning and assuming the initial configuration of the structure) adopting higher load factors α (using an *incremental procedure* or, better, by the *bisection method*) until the four interfaces that fail are detected where the hinges open (and that develop at the opposite side, intrados or extrados, as regards to the position of the nullified tensile forces at each step). The value of the collapse load factor α_0 which activates the mechanism is therefore unequivocally computed.

6. The Computer Program SAV-SVM

The algorithm designed for identifying the collapse mechanism of a voussoir arch, described above, has been implemented in the computer calculation program SAV-SVM [AEDES Software, 2000; Paradiso *et al.*, 2007].

In addition to the assessment of the seismic vulnerability carried out using the kinematic procedure, this software also allows one to study the stability of masonry arches and vaults, subjected to both stationary and increasing loads, and produces, in addition to numerical results, a graphical representation of the thrust line drawn on the structure's profile and diagrams of internal forces. An application of the numerical procedure to a real case can be found in [Galassi *et al.*, 2013b].

As an example, the analysis of a circular barrel vault with variable thickness is discussed; it is located on the ground floor of a two storey historical building, in the town of Florence, FI, Italy (LONG = 11.2499; LAT = 43.7874), and used as the municipal archive (service load equal to 8 kN/m² according to the NTC). Fig. 8 shows the cross section of the vault in detail, with the measures derived from the geometric survey.

Since the vault thickness between the centre sector (40 centimetres) and the lateral sectors (50 centimetres each) are different, it was not possible to model the structure as a circular vault directly in SAV. Therefore, the vault was modelled as a three-centred vault (with three coinciding centres). Specifically, the three sectors have an intrados radius of 3.25 m. The first sector is located between the two sections with slope angles of 180° and 140°. The second sector is located between the two sections with slope angles of 140° and 40°, and the third sector is located between the two sections with slope angles of 40° and 0°. The whole structure was discretized into 18 voussoirs (60 cm wide).

The input data derived from structural surveys are listed in Table 3.

By SAV, two static analyses were performed: the first under permanent loads (to assess its stability) and the second under increasing vertical loads (to assess the safety factor). Successively the seismic analysis by means of the kinematic procedure was conducted.

The external actions on the building have been defined according to the building code; in this regard two elemental load conditions were formulated. The former considered the presence of all the “Permanent Loads” (that is the self-weight of the vault, the backfill, the mortar bed and the floor); the latter considered the action of the “Variable Loads” (that is the service load due to the weight of the paper) to which the required combination factor $\psi_2 = 0.80$ was applied to perform the seismic analysis. Variable actions, as it is obvious, are the only loads affected by the multiplier which allows the computation of the collapse vertical load during static analysis.

The static analysis was executed twice: two static combinations of the actions were defined by the partial safety factors for actions γ_G and γ_Q ; the former refers to permanent loads, the latter to variable actions. The first combination of the actions considered only the self-weight of the structure G_1 (vault) and the non-structural permanent loads G_2 (backfill, mortar bed, floor). The latter considered both the permanent loads and the service load Q (that is, an unfavourable action). To verify the structure at ULS (rigid body equilibrium), the above two combinations of the actions expressed by

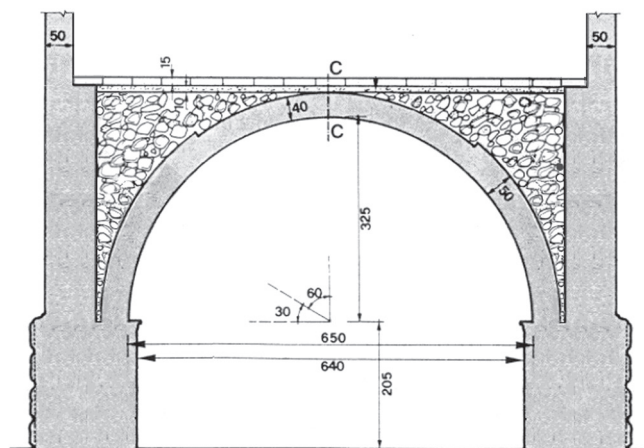


Fig. 8. Cross section of the vault analyzed by SAV.
Sezione trasversale della volta analizzata con il software SAV.

Tab. 3. Input data.

Material	Thickness [m]	Unit weight [kN/m ³]
Stone vault	0.40–0.50	26.00
Masonry Rubble backfill	/	13.00
Mortar bed	0.10	23.00
Brick floor	0.15	18.00

Tab. 4. Static Combinations of the actions (CCC).

CCC		γ_G	γ_Q
1	Permanent actions + Favorable variable action	1.00	0
2	Permanent actions + Unfavorable variable action	1.00	1.50

Equation (34) describe the “fundamental static combination at ULS” as required by the NTC (§2.5.3, NTC 2008):

$$\gamma_{G1} \cdot G_1 + \gamma_{G2} \cdot G_2 + \gamma_{Q1} \cdot Q_{k1} + \gamma_{Q2} \cdot \psi_{02} \cdot Q_{k2} + \dots + \gamma_{Qn} \cdot \psi_{0n} \cdot Q_{kn} \quad (34)$$

where:

- G_1 : self-weight of all structural elements;
- G_2 : self-weight of all non-structural elements;
- Q_{k1} : fundamental variable action;
- Q_{k1}, \dots, Q_{kn} : variable actions which may act together with the fundamental one simultaneously;
- γ_{G1} : partial factor for self-weight of the structure (vault);
- γ_{G2} : partial factor for non-structural elements (backfill, mortar bed, floor);
- γ_{Q1} : partial factor for fundamental variable action Q_{k1} ;
- ψ_{0j} : combination factors for variable actions Q_{k2}, \dots, Q_{kn} which may act together with the fundamental one simultaneously.

In this example only the first three addenda in Equation (34) are different from zero, since only the fundamental variable action was considered (service load of the stored paper). The two assumed combinations of the actions are described in Table 4.

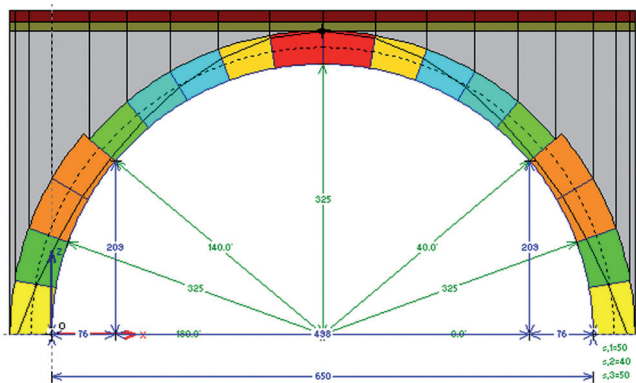


Fig. 9. Line of thrust of the second combination of the actions.
Curva delle Pressioni relativa alla seconda combinazione delle condizioni di carico.

Fig. 9 graphically shows the static solution of the second combination of the actions and highlights the position of the thrust line in the arch's profile. It demonstrates the condition of stability of the vault under vertical loads, even if the key section appears weakened, because the line of thrust passes through a limit position: tangent to the extrados. It means that the above described numerical procedure detected, in the initial solution of the procedure, one tensile force at the intrados of the section and has turned it into zero by introducing a distortion. Furthermore, the computed collapse vertical load factor, which corresponds to the safety factor of the structure, is very high (equal to 24.558), so one can deduce that the safety of the structure, subjected to vertical loads, is guaranteed.

The kinematic seismic analysis, instead, requires a collapse mechanism to be individualized. The analysis has been carried out in accordance with the seismic combination required by the NTC and is described in Equation (35):

$$E + G_1 + G_2 + P + \psi_{21} \cdot Q_{K1} + \dots + \psi_{2n} \cdot Q_{Kn} \quad (35)$$

where, in addition to the coefficients previously described:

- E : seismic action;
- P : pre-tension and pre-compression which, in this example, are both zero;
- ψ_{2j} : combination factors for variable actions Q_{Kn} to be used for seismic combination.

The results of the analysis clearly show the tendency of the structure to collapse when the mechanism is activated by the opening of four hinges (Fig. 10).

In correspondence to a collapse load factor equal to $\alpha_0 = 0.127$, the seismic capacity, in terms of PGA, is equal to 0.214g, and it is higher than the seismic demand (0.157g). So, one can conclude that the structure under study is safe.

It may be significant to re-analyze the structure choosing a thinner mesh. For example, modelling the structure by means of 218 voussoirs instead of 18, one can notice that the results do not change substantially (Fig. 11).

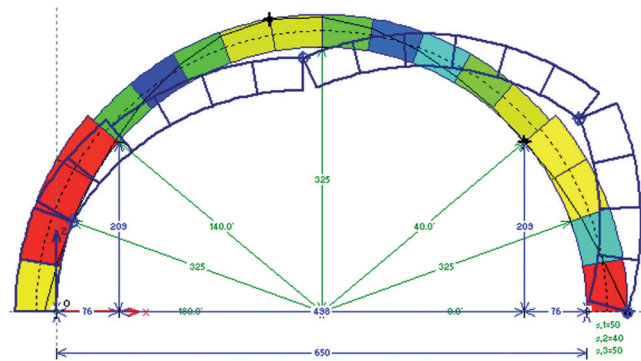


Fig. 10. Kinematic seismic analysis: collapse mechanism.
Analisi sismica cinematica: meccanismo di collasso.

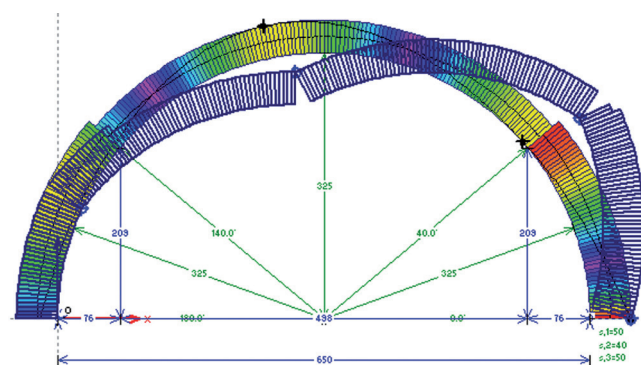


Fig. 11. Kinematic seismic analysis related to a thinner mesh: collapse mechanism.

Analisi sismica cinematica con mesh più fitta: meccanismo di collasso.

The collapse vertical load factor decreases from 24.558 to 24.556 (an insignificant change) while the collapse horizontal load factor decreases from 0.127 to 0.117, and correspondently the capacity, in terms of PGA, decreases from 0.214g to 0.190g (but it still remains higher than the seismic demand), a change of -11.2%, which is obviously irrelevant with regard to the safety verification.

This circumstance highlights that the numerical procedure proposed for analyzing the stability of masonry voussoir arches and vaults, as well as for assessing the seismic safety related to the feasible collapse mechanisms, is not affected by a mesh dependent problem and, in the form of the SAV-SVM software, represents an effective professional tool to perform safety verifications of these kinds of structures.

7. Conclusions

In this paper the issue of the seismic analysis of rigid masonry voussoir arches and vaults has been dealt with, by the linear kinematics procedure, in accordance with the Italian Building Code.

A simple case study was presented, step by step, to provide readers with a clear tutorial in order to introduce them to the fundamental steps of such an approach. The goal of presenting the introductory arch ex-

ample numerically, is to allow the reader to reiterate the analysis for real and thus more complicate structures.

Since the most critical issue of the kinematic procedure consists of defining the suitable collapse mechanism for which the seismic verification has to be performed, a numerical algorithm to compute the collapse load factor and the relating failure mechanism has been proposed.

The proposed numerical procedure is able to individualize only flexural type collapse mechanisms (a four hinge kinematism) because the sliding phenomenon, which is a feasible failure in the case of lateral actions such as an earthquake [D'Ayala *et al.*, 2012], has been considered a local failure phenomenon which prevents the complete activation of the mechanism. So, the shear force in the interfaces is continuously monitored and kept low in order to prevent sliding phenomena (rigid-plastic behaviour). For this reason, in the algorithm, only distortions acting on tensile forces are activated in order to individualize the collapse mechanism. Once a tensile force is nullified, the corresponding link cracks and an opening hinge occurs.

However, if one believes it is significant to also consider mixed collapse mechanisms, those that occur when 1) opening hinges develop in some sections and 2) sliding (which in the numerical procedure is interpreted as a degradation of the original fixed interface constraint that becomes a slider-type connection) occurs in other, but different, sections, one can assume the tangential link, in the interface mechanical model, has a "sliding-friction" type behaviour (Coulomb-like criterion). According to the Coulomb criterion, once the shear force in the tangential link has reached the limit friction force, the shear force becomes equal to zero and sliding occurs (Fig. 7b).

In the numerical procedure, to activate the "sliding-friction" type behaviour, it is sufficient that the distortions turn the shear force to zero instead of lowering it when they are required to act on the tangential links as a consequence of a shear force higher than the corresponding limit friction force. This concept can be numerically computed assuming the sub-vector $[L]$ in Equation (30) is equal to the null vector.

The results of the authors' scientific research and the calculation software SAV-SVM implementing the above described numerical procedure, can be found at: www.aedes.it.

8. Acknowledgements

The authors wish to thank associate Professors Michele Paradiso and Giacomo Tempesta (Department of Architecture, University of Florence, Italy) who are the inventors of the original algorithm formulated to evaluate the degree of stability of a masonry vaulted structure composed of rigid blocks. This algorithm has been updated, by the authors, in the new form presented in this paper to individualize the collapse mechanisms. In this way, the potentiality of the algorithm has been improved in such a way making it immediately usable for the seismic analysis in accord-

ance with the Italian Building Code. Special thanks to Daniela Zerboni and Libby Lee for their availability and advise for the editing of this paper.

9. References

- AEDES Software [2000] "SAV: Stabilità di Archi e Volte in muratura"; "SVM: Sistemi Voltati in Muratura", software for the structural analysis of masonry vaulted systems, www.aedes.it.
- Alberti, L. A. [1966] *De Re Aedificatoria*, trans. G. Orlandi, note Paolo Portoghesi, Il Polifilo, Milano.
- Baggio, C. and Trovalusci, P. [1998] "Limit analysis for no-tension and frictional three-dimensional discrete systems", *Mechanics of Structures and Machines* **26**(3), 287-384.
- Baggio, C. and Trovalusci, P. [2000] "Collapse behaviour of three-dimensional brick-block systems using non-linear programming", *Structural Engineering and Mechanics* **10**(2), 1-15.
- Block, P., Ciblac, T. and Ochsendorf, C. [2006] "Real-time limit analysis of valuted masonry buildings", *Computers & Structures* **84**(29-30), 1841-1852.
- Circular [2009] No. 617, 2 Febbraio 2009, "Istruzioni per l'applicazione delle Nuove Norme Tecniche per le costruzioni", G.U. n. 47 del 26 Febbraio 2009.
- Colonnetti, G. [1955] *Scienza delle Costruzioni*, Edizioni Scientifiche Einaudi, Torino.
- Coulomb, C. A. [1776] *Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, et lus dans les Assemblées*, Académie Royale des Sciences, Paris.
- Couplet, C. A. [1731] *De la poussée des voutes*, Académie Royale des Sciences, Paris.
- Couplet, C. A. [1732] *Seconda parte de l'examen de la poussée des voutes*, Académie Royale des Sciences, Paris.
- D'Ayala, D. and Paganoni, S. [2011] "Assessment and analysis of damage in l'Aquila historic city centre after 6th April 2009", *Bulletin of Earthquake Engineering* **9**, 81-104.
- D'Ayala, D. and Ansal, A. [2012] "Non linear push over assessment of heritage buildings in Istanbul to define seismic risk", *Bulletin of Earthquake Engineering* **10**, 285-306.
- De Lorenzis, L., DeJong, M. and Ochsendorf, J. [2007] "Failure of masonry arches under impulse base motion", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* **36**, 2119-2136.
- Di Pasquale, S., [1998] "Masonry arches: Volterra's and Somigliana's dislocations", *Proc. of the II Arch Bridge Conference*, Venezia.
- D.M. LL. PP.[2008] 14 Gennaio 2008, "Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni (NTC)", G.U. n. 29 del 4 Febbraio 2008.
- Galassi, S., Paradiso M. and Tempesta, G. [2004] "A Numerical Method for No-tension Analysis of Masonry Arches", *Proc. of IV International Conference on Arch Bridges*, Barcellona, Spagna, 312-321.
- Galassi, S., Paradiso, M., Pieroni, E. and Tempesta, G. [2011] "Analisi di strutture in muratura soggette

- a vincoli cedevoli: un algoritmo di calcolo non lineare”, *Proc. of XX Congresso Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata, AIMETA 2011*, Bologna, Italia, <http://www.lamc.ing.unibo.it/aimeta2011/>.
- Galassi, S., Paradiso, M. and Tempesta, G. [2012a] “X-Vaults: a Software for the Analysis of the Stability of Masonry Cross-Vaults”, *Computer Science Issue (IJCSI)*, **9(2)**, 133-142.
- Galassi, S., Paradiso, M. and Tempesta, G. [2012b] “Un codice di calcolo per strutture in muratura a blocchi rigidi con giunti di tipo unilatero ed attritivo”, *Proc. of Congresso AID Monumenti – Conoscere, Progettare, Ricostruire*, Perugia, 483-492.
- Galassi, S., Paradiso, M. and Tempesta, G. [2013a] “Non-linear analysis of masonry structures subjected to external settlements”, *Open Journal of Civil Engineering*, **3(2A)**, 18-26.
- Galassi, S., Paradiso, M., Tempesta, G. and Zerboni, D. [2013b] “The medieval bridge over the Rignalla brook near Florence: analysis and rehabilitation project”, *International Journal EDA – Esempi di Architettura*, <http://www.esempidiarchitettura.it>.
- Gatto, F. and Ottolini, L. [1983] “Le dislocazioni nella teoria della frattura: da Volterra alla teoria delle dislocazioni superficiali”, *Proc. of I Convegno Nazionale del Gruppo Frattura, IGF 1983*, Milano.
- Gilbert, M. and Melbourne, C. [1994] “Rigid-block analysis of masonry structures”, *Structural Engineer*, **72(21)**, 356-360.
- Heyman, J. [1982] *The Masonry Arch*, Ellis Horwood Ltd., Chichester.
- Heyman, J. [1995] *The Stone Skeleton*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Munari, M., Bettiol, G., Da Porto, F., Milano, L. and Modena, C. [2010] *Esempio di calcolo su rafforzamento locale di edifici in muratura con tiranti*, Allegato alle “Linee Guida per la Riparazione e il Rafforzamento di Elementi Strutturali, Tamponature e Partizioni”, Doppiavoce Edizioni.
- O’Dwyer, D. [1999] “Funicular analysis of masonry vaults”, *Computers & Structure* **73**, 187-197.
- OPCM [2005] No. 3431, 3 Maggio 2005, “Ulteriori modifiche ed integrazioni all’OPCM 20 Marzo 2003 n. 3274, recante ‘Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica’”, G.U. n. 107, 10 May 2005.
- Paradiso, M., Tempesta, G., Briccoli Bati, S. [1992] “Un procedimento numerico per il calcolo di strutture in muratura” *Proc. of XI Congresso Nazionale AIMETA*, Trento, Italia, 127-132.
- Paradiso, M., Tempesta, G., Galassi, S., Pugi, F. [2007] *Sistemi Voltati in Muratura. Teoria e Applicazioni*, DEI Tipografia del Genio Civile, Roma.
- Penrose, R. [1955] “A generalized inverse for matrices”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51(3)**, 406-413.
- Smars, P. [2000] “Études sur la Stabilité des Arcs et Voutes”, Ph.D. Dissertation, Catholic University in Leuven, Belgium.

Analisi sismica di archi a conci in muratura secondo la normativa italiana

F. Pugi, S. Galassi

SOMMARIO – L'articolo è rivolto ad un pubblico di professionisti, ingegneri e architetti, incaricati di valutare il livello di vulnerabilità sismica degli edifici storici e monumentali e di garantire la loro salvaguardia. I collassi manifestati dagli edifici in muratura sottoposti ad eventi sismici evidenziano frequenti casi di perdita di equilibrio, ovvero ribaltamenti rigidi di porzioni strutturali. Lo studio dei meccanismi di collasso può efficacemente essere affrontato utilizzando i metodi dell'analisi cinematica, recentemente codificata all'interno delle norme italiane. Con riferimento ad una particolare tipologia strutturale (l'arco in muratura), molto frequente negli edifici storici, l'articolo propone un approccio originale di verifica sismica fondato su un algoritmo dedicato al problema. Si evita in questo modo l'imposizione a priori delle sezioni di rottura, individuando analiticamente il cinematismo ed il corrispondente moltiplicatore di collasso. La conseguente verifica sismica viene condotta nel rispetto del regolamento.

Parole chiave: vulnerabilità sismica, cinematica lineare, muratura, archi a conci, costruzioni esistenti, normativa italiana

1. Introduzione

Le attuali norme tecniche italiane per le costruzioni, il DM *Infrastrutture* 14 gennaio 2008, entrate in vigore con la Circolare n° 617 del 2 febbraio 2009, propongono per le costruzioni esistenti in muratura di associare all'analisi sismica globale lo studio di meccanismi di collasso di tipo locale.

“Negli edifici in muratura spesso avvengono collassi parziali per cause sismiche, in genere per perdita dell'equilibrio di porzioni murarie [...]. Le verifiche con riferimento ai meccanismi locali di danno e di collasso possono essere svolte tramite l'analisi limite dell'equilibrio, secondo l'approccio cinematico, che si basa sulla scelta del meccanismo di collasso e la valutazione dell'azione orizzontale che attiva tale meccanismo. L'applicazione del metodo di verifica presuppone quindi l'analisi dei meccanismi locali ritenuti significativi per la costruzione, che possono essere ipotizzati [...]” sulla base del livello di conoscenza della costruzione stessa. Il capitolo C8A.4 della Circolare 617/2009 di attuazione delle Norme Tecniche Italiane per le Costruzioni (NTC 2008), introduce nella Normativa Sismica Italiana l'analisi cinematica (o analisi dei meccanismi di collasso) come strumento di analisi locale delle strutture murarie esistenti.

La scuola di pensiero da cui deriva questo approccio, che, a partire dalla precedente OPCM 3431/2005 [Consiglio dei Ministri, 2005], si differenzia sensibilmente dalla normativa del passato, nasce dalla consapevolezza del legislatore che una costruzione in muratura storica si comporta diversamente da una di nuova realizzazione nel caso di un terremoto. Una lettura critica dei danni subiti dalle costruzioni storiche a seguito di eventi sismici ha evidenziato fenomeni di crolli di porzioni murarie dovuti ad una perdita di monoliticità della costruzione stessa. Per questo motivo la prestazione sismica della costruzione dovrebbe essere fondamentalmente valutata considerando il problema della stabilità dell'equilibrio sulla base di una formulazione di tutti i meccanismi di collasso cinematicamente compatibili (ossia possibili) da scongiurare, ed in seconda istanza

al superamento, ove significativo, dei valori limite delle resistenze offerte dal materiale costitutivo.

Gli autori si trovano perfettamente allineati con le idee base del legislatore e concordano con la necessità di valutare le prestazioni sismiche e il livello di vulnerabilità di una costruzione storica facendo riferimento prioritariamente alla statica dell'equilibrio dei corpi rigidi e alla definizione dei meccanismi di collasso possibili, sui quali formulare opportuni modelli di calcolo.

2. L'Arco a Conci Rigidi: Esempio Introduttivo

Le potenzialità della metodologia utilizzata possono essere evidenziate facendo riferimento ad un semplice esempio qui riportato come traccia per una applicazione generalizzata.

Si consideri l'arco a tutto sesto incastrato sulla testa dei pilastri, illustrato in Fig. 1.

Il modello matematico semplificato di questo arco consiste di quattro conci tutti uguali, con profilo circolare, tra loro connessi da incastri interni in corrispondenza delle interfacce. In tali sezioni potranno crearsi sconnessioni nel caso in cui la curva delle pressioni tenda a fuoriuscire dalla geometria per effetto dei carichi applicati. Questa tecnica verrà spiegata in dettaglio nel seguito. Nell'esempio, il peso dei conci vale 11.24 kN e, per semplicità, è l'unico carico applicato. Il grado di iperstaticità di questa tipologia di strutture è pari a 3 (indipendentemente dal numero dei conci). L'arco copre una luce di 5.00 metri (la freccia è dunque pari a 2.50 metri) con uno spessore costante di 30 centimetri ed una profondità simbolica di 1 metro.

Lo studio della vulnerabilità e del comportamento sismico di tale struttura consiste, prima di tutto, nella *previsione* del meccanismo di collasso che si potrà attivare in presenza di azioni esterne. Nell'ipotesi di corpo rigido e di materiale infinitamente resistente a compressione, il meccanismo di collasso è funzione dell'entità dell'azione sismica e del numero di conci di cui è costituita la struttura. A proposito di ciò, lo stesso Leon Battista Alberti scrisse “...giacchè in ogni corpo

è meno divisibile la parte concresciuta e unita naturalmente di quella che è stata congiunta e saldata dal lavoro dell'uomo" [Alberti, trad. Orlandi, 1966]; perciò è immediato dedurre che nelle strutture reali il numero di meccanismi attivabili dipende proprio dal numero di conci, o più correttamente, di giunti lungo i quali possono aver luogo le dislocazioni.

3. Analisi del Meccanismo di Collasso

3.1. Il moltiplicatore del carico di collasso

Si vuole ricercare il livello di vulnerabilità immaginando che il sisma orizzontale, agente nel piano della struttura, avvenga da sinistra verso destra.

Si prescinda, in prima approssimazione, dalla scelta del meccanismo di collasso che il sisma sarà in grado di attivare, e si ipotizzi di aver già individuato, tra i possibili meccanismi di collasso compatibili, quello più probabile o, in ogni caso, l'unico effettivamente possibile. Tale meccanismo di collasso viene rappresentato in Fig. 2, ed è tale da movimentare i conci n° 1, 2, 3, mentre il quarto concio resta fermo sull'imposta di sinistra.

Le attuali norme [D.M.LL.PP., 2008; Circolare n.617, 2009] prevedono la valutazione dei parametri che definiscono la pericolosità sismica del territorio nazionale secondo un approccio innovativo che fa uso di una indagine *sito-dipendente* al posto di una *zona-dipendente*. In passato, il rischio sismico era determinato sulla base di zone omogenee, su ciascuna delle quali veniva assunto un valore uniforme dell'accelerazione di picco (PGA) al suolo. Oggi, invece, il rischio sismico, in Italia, è sito dipendente, per cui la PGA viene riferita ad una griglia ideale in cui viene suddiviso il territorio nazionale e definita mediante valori puntuali in corrispondenza dei nodi del reticolo stesso e in corrispondenza di 9 predeterminati periodi di ritorno dell'azione sismica. Il comportamento sismico della struttura può essere studiato attraverso l'applicazione di forze orizzontali proporzionali ai carichi verticali secondo moltiplicatori che dipendono dai parametri spettrali e quindi dalla PGA. Per determinare la capacità della struttura in termini di PGA, e quindi per confrontarla con la domanda secondo normativa, la procedura prevede l'applicazione di forze orizzontali crescenti fino alla formazione del cinematismo, convenzionalmente identificato come stato limite ultimo della struttura.

Con riferimento alla Fig. 2, si dovranno generare tutte le forze sismiche proporzionali ai pesi dei conci e si faranno crescere aumentando a poco a poco il valore del coefficiente di proporzionalità α (*moltiplicatore del carico*), il quale, una volta raggiunto il valore di attivazione del meccanismo previsto, rappresenterà il *moltiplicatore del carico di collasso*, che, in simbolo, la norma italiana chiama α_0 .

Noto il moltiplicatore di collasso α_0 , le relazioni (riportate in dettaglio nella norma italiana, §C.8A.4.2.2, NTC 2008) che legano α_0 alla PGA determinano la capacità del sistema.

Nel caso di edifici esistenti di interesse storico, la NTC richiede solamente che la risposta della struttura sia idonea a sopportare un sisma senza raggiungere il collasso e salvaguardando le vite umane, pur accettando che tali edifici non possiedano i livelli di sicurezza richiesti dalla norma stessa agli edifici nuovi. Per questo motivo è consentito di effettuare la verifica sismica

solamente nei riguardi degli stati limite ultimi SLU (gli Stati Limite Ultimi si riferiscono sia allo Stato Limite di Collasso (SLC) che allo Stato Limite di Salvaguardia della Vita (SLV)), e di trascurare la verifica nei confronti degli stati limite di esercizio (SLE)).

Il meccanismo di collasso che è stato ipotizzato nell'esempio è il tipico meccanismo di tipo flessionale, storicamente proposto da Couplet nel '700 [Couplet, 1731, 1732]. Tale meccanismo di collasso è dovuto alla formazione di quattro cerniere cilindriche alternate lungo i profili di intradosso e di estradosso dell'arco che provocano la rotazione relativa di un concio rispetto ad un altro facendo perno sui punti di cerniera.

La norma definisce le cerniere cilindriche tra i conci dell'arco "le linee di vincolo tra i blocchi coinvolti nel cinematismo".

Sebbene non sia l'unico meccanismo possibile [D'Ayala *et al.*, 2012], il meccanismo flessionale è considerato da alcuni autori [De Lorenzis *et al.*, 2007; O'Dwyer, 1999] un modo di collasso abbastanza veritiero per un arco in caso di sisma, qualora si affronti il problema nei termini della analisi limite in accordo alle note ipotesi di J. Heyman [Heyman, 1982, 1995] relative alla definizione del dominio di ammissibilità del materiale muratura:

- infinita resistenza alla compressione con conseguente impossibilità di innesco di fenomeni di schiacciamento (ipotesi motivata dal fatto che il livello della compressione in un arco è generalmente basso);

- resistenza nulla a trazione (ipotesi che trae spunto dal fatto che in una costruzione storica le proprietà della malta hanno subito un decadimento col passare del tempo);

- infinita resistenza allo scorrimento dei conci lungo i giunti (ipotesi motivata dal fatto che la forza di taglio nei giunti, responsabile dello scivolamento dei conci, è bassa se paragonata a quella di compressione; ciò si evince osservando che la forma della linea delle pressioni, dovendo essere contenuta interamente dentro il profilo dell'arco per garantire l'equilibrio secondo il Teorema Statico sull'Analisi Limite, non può discostarsi molto dalla forma della linea media dell'arco stesso).

Per quanto riguarda il fenomeno dell'attrito nelle interfacce, la formulazione originaria di Heyman prescindeva dalle verifiche a scorrimento. La metodologia applicata può essere estesa anche a tali fenomeni, come sarà evidenziato nel capitolo 5. L'esempio semplice (Fig. 2) vuole riferirsi tuttavia al cinematismo generato dalle cerniere che si formano per la crisi a trazione. Qualora il collasso locale per scorrimento avvenga per valori del moltiplicatore più bassi rispetto alla crisi per cinematismo, il moltiplicatore di collasso corrisponde ad una struttura per la quale il meccanismo complessivo non si attiva e lo Stato Limite Ultimo viene raggiunto per il cedimento locale di un concio.

Le considerazioni sull'infinita resistenza a compressione, sulla resistenza a trazione nulla e sull'attrito sono in accordo con quanto espresso nella Normativa (§C8A.4, Circolare 617/2009).

Per ricavare numericamente il valore del moltiplicatore di collasso che attiva il cinematismo previsto, è necessario formulare una *equazione di equilibrio* che esprima l'impossibilità di attivazione di quel meccanismo in caso di sisma. Tale equazione viene detta *equazione di catena*, o più comunemente, equazione del *Principio dei Lavori Virtuali*, secondo il quale tutte le forze reali F^r applicate sulla struttura (carichi verticali

ed azioni sismiche orizzontali) compiono lavoro per gli spostamenti fittizi s^f dei loro punti di applicazione (baricentri dei concii). Per impedire l'innescio del meccanismo di collasso, il lavoro totale di tutte le forze in gioco deve essere nullo:

$$L_v = F^r \cdot s^f = 0 \quad (1)$$

La scrittura della Equazione (1) prevede la definizione a priori degli spostamenti δ_x e δ_y dei punti di applicazione delle forze. Pertanto è necessario descrivere la catena cinematica mediante la definizione dei centri assoluti e relativi di rotazione e il tracciamento dei diagrammi degli spostamenti orizzontali e verticali dei concii della struttura a partire da un valore arbitrario dello spostamento di un punto qualsiasi o della rotazione di un concio (Fig. 2). Nel caso in esame è stato assunto come valore arbitrario la rotazione φ_1 del primo concio.

Le posizioni dei centri assoluti di rotazione 1 e 3 sono note, in quanto coincidenti con la prima ed ultima cerniera del meccanismo. Anche i centri relativi 1,2 e 2,3 sono noti, in quanto coincidono con la posizione delle cerniere interne.

Le coordinate del centro assoluto 2 (Fig. 2) possono essere ottenute come intersezione tra la retta r (passante per i centri 1 ed 1,2) e la retta s (passante per i centri 2,3 e 3):

$$\begin{cases} \frac{y - y_1}{y_{1,2} - y_1} = \frac{x - x_1}{x_{1,2} - x_1} \\ \frac{y - y_{2,3}}{y_3 - y_{2,3}} = \frac{x - x_{2,3}}{x_3 - x_{2,3}} \end{cases} \quad (2)$$

Tracciati i diagrammi degli spostamenti orizzontali e verticali in Fig. 2, è possibile valutare gli spostamenti orizzontali e verticali dei punti di applicazione delle forze in funzione della rotazione di ogni concio i (o, in un caso generale, di una porzione rigida costituita da più concii contigui) su cui tali forze sono applicate:

$$\begin{cases} \delta_{xi} = \delta_{xi}(\varphi_i) \\ \delta_{yi} = \delta_{yi}(\varphi_i) \end{cases} \quad (3)$$

L'equazione di catena che impone l'impossibilità di innescio del cinematismo previsto assume la forma:

$$L_v = \alpha \cdot P_1 \cdot \delta_{x1} + \alpha \cdot P_2 \cdot \delta_{x2} + \alpha \cdot P_3 \cdot \delta_{x3} + \\ - P_1 \cdot \delta_{y1} - P_2 \cdot \delta_{y2} - P_3 \cdot \delta_{y3} = 0 \quad (4)$$

Nell'esempio, in cui $P_1 = P_2 = P_3$, l'Equazione (4) assume la forma semplificata:

$$\alpha \cdot (\delta_{x1} + \delta_{x2} + \delta_{x3}) - \delta_{y1} - \delta_{y2} - \delta_{y3} = 0 \quad (5)$$

Riformulando tutti gli spostamenti in funzione dell'unica incognita φ_1 (variabile cinematica) è infine possibile ricavare il valore del moltiplicatore di collasso.

Nel caso in esame:

$$\alpha_0 = 0.046 \quad (6)$$

3.2. Calcolo dei parametri sismici

Noto il meccanismo di collasso della struttura ed il valore del moltiplicatore dei carichi capace di attivarlo, il passo successivo consiste nel valutare i parametri

sismici della struttura, cioè la massa partecipante M^* al cinematismo e l'accelerazione spettrale a_0^* di attivazione.

La massa partecipante M^* può essere valutata considerando gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione dei diversi pesi $P_i = gM_i$, associati al cinematismo, come una forma modale di vibrazione (Equazione C8A.4.3, Circ. n. 617/2009):

$$M^* = \frac{(\sum P_i \cdot \delta_{xi})^2}{g \cdot \sum P_i \cdot \delta_{xi}^2} \quad (7)$$

dove P_i sono i carichi verticali le cui masse, per effetto dell'azione sismica, generano forze orizzontali sugli elementi della catena cinematica, e δ_{xi} sono gli spostamenti virtuali dei loro punti di applicazione in direzione orizzontale. Poiché tali spostamenti, descritti nel Sistema (3), sono espressi in funzione del parametro di spostamento φ_1 arbitrario, dovranno prima essere ottenuti numericamente imponendo a φ_1 il valore convenzionale pari ad 1.

L'esempio fornisce:

$$M^* = 2966.1 \text{ kg} \quad (8)$$

L'accelerazione sismica spettrale che attiva il meccanismo si ottiene mediante la relazione (Equazione C8A.4.4, Circ. n.617/2009):

$$a_0^* = \frac{\alpha_0 \sum P_i}{M^*} \quad (9)$$

Nell'esempio:

$$a_0^* = 0.053 \text{ g} \quad (10)$$

Secondo quanto previsto dalla normativa italiana vigente (e similmente a quanto previsto dall'Eurocodice 8), che ha adottato un approccio probabilistico al posto di quello deterministico usato in passato, è richiesto di abbattere cautelativamente il valore della accelerazione spettrale capace di attivare il cinematismo, per mezzo di un coefficiente di sicurezza parziale che è funzione del livello di conoscenza della struttura conseguito dal professionista, in relazione alle informazioni raccolte sulla geometria, sui dettagli costruttivi e sulle proprietà dei materiali. Tale coefficiente prende il nome di *fattore di confidenza* F_C , ed assume i tre valori riportati nella tabella 1.

In questo senso, l'Equazione (9) viene sostituita dall'Equazione (11) (Equazione C8A.4.4, Circ. n. 617/2009):

$$a_0^* = \frac{\alpha_0 \sum P_i}{M^* \cdot F_C} \quad (11)$$

Ipotizzando che il professionista, nel caso in esempio, conosca solo limitatamente la struttura in esame (LC_1), l'accelerazione spettrale, precedentemente ottenuta, deve essere ridotta dividendola per il coefficiente 1.35, ottenendo così il valore cautelativo:

$$a_0^* = \frac{0.523 \text{ g}}{1.35} = 0.039 \text{ g} \quad (12)$$

Comunque, indipendentemente dal livello di conoscenza conseguito, la Circ. n. 617/2009 indica che nel caso in cui per la valutazione del moltiplicatore di collasso non si sia tenuto conto della resistenza a

Tab. 1. Livelli di Conoscenza (LC) e Fattori di Confidenza (F_c).

LC	F_c	Conoscenza
1	1.35	Limitata
2	1.20	Adeguata
3	1.00	Accurata

compressione della muratura (cioè si sia ipotizzata infinita), il fattore di confidenza da utilizzare dovrà essere quello relativo al livello di conoscenza LC_1 , cioè 1.35 (§C8A.4.2.2, Circ. 617/2009).

4. Verifica di Sicurezza Sismica

L'analisi sismica di una costruzione in muratura esistente, condotta mediante il procedimento della cinematica lineare, si conclude con una verifica che determinerà se la struttura è capace o meno di sostenere il sisma atteso.

L'operazione di verifica è una operazione che si basa sul confronto diretto tra *capacità sismica* della struttura e *domanda sismica* richiesta dalla normativa. Nell'esempio introduttivo, in accordo con la Circolare n. 617/2009, la verifica si basa sul confronto tra accelerazione spettrale a_0^* capace di attivare il meccanismo e l'accelerazione spettrale definita dalla norma. Quest'ultima (rappresentativa della intensità dell'evento sismico) produrrà danni maggiori sulla struttura assegnata, che ipotizziamo essere collocata all'interno di un qualche complesso edilizio, come un edificio multipiano, a seconda della sua quota dal piano fondale. Come noto, infatti, l'effetto di un sisma su un edificio multipiano, è maggiore ai piani alti che non al pianterreno. Per questo motivo la norma propone due relazioni distinte per valutare l'accelerazione spettrale domandata: a_1^* si riferisce ad una accelerazione coincidente con l'input sismico al terreno mentre a_2^* si riferisce ad una posizione del macro-elemento in elevazione con struttura sottostante deformabile, per cui risulta $a_2^* > a_1^*$.

L'accelerazione spettrale al suolo a_1^* si ottiene mediante la relazione (Equazione C8A.4.9, Circ. n. 617/2009):

$$a_1^* = \frac{a_g \cdot S}{q} \quad (13)$$

mentre quella in quota a_2^* si ottiene mediante la definizione dello spettro di risposta elastico $S_e(T)$ (Equazione C8A.4.10, Circ. n. 617/2009):

$$a_2^* = \frac{S_e(T_1) \cdot \psi(Z) \cdot \gamma}{q} \quad (14)$$

Nelle Equazioni (13) e (14) si definisce:

- a_g : accelerazione orizzontale massima (PGA) attesa nel sito di ubicazione della costruzione, in condizioni ideali di campo libero, suolo rigido e superficie topografica orizzontale (suolo di categoria A, come definito in §3.2.2, NTC 2008), che i sismologi hanno valutato in 10751 siti ed in corrispondenza di 9 tempi di ritorno dell'azione sismica (30 anni, 50 anni, 72 anni, 101 anni, 140 anni, 201 anni, 475 anni, 975 anni, 2475 anni), per cui, nel caso specifico, dovrà essere valutata esattamente con riferimento al sito effettivo della costruzione in esame e al periodo di ritorno previsto (a_g è fornito dalle NTC 2008 nell'allegato B, che con-

tiene le tabelle dei parametri che definiscono l'azione sismica: a_g, F_0, T_c^*);

- S : fattore di suolo, ossia un coefficiente che modifica (cioè: rende reale) l'accelerazione ideale a_g per considerare l'effettivo suolo di fondazione (che potrebbe non essere rigido né orizzontale) e che vale $S = S_s \cdot S_T$, cioè è funzione sia del coefficiente di "compensazione" stratigrafico S_s che di quello topografico S_T (Tabella 3.2.II, Tabella 3.2.III, Tabella 3.2.IV, NTC 2008);

- q : fattore di struttura, che può essere definito come rapporto tra le forze elastiche e quelle elasto-plastiche che in questo contesto può essere assunto pari a 2;

- $S_e(T_1)$: ordinata dello spettro elastico (definito in §3.2.3.2.1, NTC 2008) valutata con riferimento al primo periodo proprio di vibrazione della struttura T_1 , con $T_1 = C_1 \cdot H^{3/4}$ e $C_1 = 0.050$ per edifici in muratura (Equazione 7.3.5, NTC 2008);

- $\psi(Z)$: il primo modo di vibrazione della struttura nella direzione considerata, normalizzato ad 1 in sommità all'edificio; in assenza di valutazioni più accurate la norma italiana (§C8A.4.2.3, Circ. 617/2009) suggerisce di assumere: $\psi(Z) = \frac{Z}{H}$ in cui H è l'altezza totale della costruzione dal piano di appoggio della fondazione e Z l'altezza del baricentro delle linee di vincolo che separano la parte della struttura che degenera in un cinematismo da quella che rimane ferma. Nel caso dell'arco che degenera in un meccanismo di collasso di tipo flessionale, le suddette linee di vincolo non possono che essere gli assi della prima e della quarta cerniera cilindrica del meccanismo, per cui si deduce che Z è l'altezza, dal piano di appoggio della fondazione, del baricentro di tali assi (in Fig. 2, Z è la quota del punto G_L);

- γ : il coefficiente di partecipazione modale che la norma (§C8A.4.2.3, Circ. 617/2009), in assenza di valutazioni più accurate, consente di valutare in funzione del numero N di piani della costruzione: $\gamma = \frac{3N}{2N+1}$.

Per poter procedere alla verifica sismica, dobbiamo innanzitutto definire la pericolosità sismica del luogo in cui è ubicata la costruzione. Si suppone che la struttura ad arco appartenga ad un antico casolare adibito a civile abitazione sito nel comune di Montecatini Terme (PT), Italia, su un terreno molto consistente (che la norma definisce come sottosuolo di categoria B) e poco pendente (topografia T_2). Poiché il rischio sismico dipende dal sito, per prima cosa occorrerà localizzare la città termale di Montecatini Terme all'interno del reticolo di riferimento mediante le sue coordinate geografiche: LONG = 10.774700; LAT = 43.884540. Questo sito, come era del resto prevedibile, non è uno dei 10751 punti inclusi nella tabella dei siti del territorio nazionale rilevati dai sismologi. Dunque non si dispone immediatamente dei coefficienti che individuano la sua pericolosità sismica (la pericolosità sismica di un sito viene descritta mediante i tre coefficienti sopra menzionati: a_g, F_0, T_c^*).

Attraverso una procedura di interpolazione sulla base della posizione dell'edificio all'interno del reticolo di riferimento (Fig. 3) e del tempo di ritorno stimato, suggerita anch'essa dalla normativa (Allegato A, NTC 2008), vengono ottenuti i parametri di spettro che per un periodo di ritorno pari a 475 anni, risultano pari a:

$$a_g = 0.138 g, \quad F_0 = 2.414, \quad T_c^* = 0.294 \text{ sec} \quad (15)$$

Il periodo di ritorno pari a 475 anni corrisponde ad una vita di riferimento pari a 50 anni e ad una probabilità P_{VR} di superamento associata allo stato limite ultimo pari al 10%.

I parametri di spettro a_g , F_0 e T_C^* , devono essere però "aggiustati", in quanto dedotti dall'ipotesi di suolo rigido (categoria A) e pianeggiante (topografia T_1). Considerando l'effettivo suolo di fondazione, i cui dati sono riportati in Tabella 2, si ottiene nel caso in esame il coefficiente di "compensazione", cioè il fattore di suolo S :

$$S = S_S \cdot S_T = 1.20 \cdot 1.2 = 1.44 \quad (16)$$

Con riferimento alla Equazione (13), l'accelerazione sismica al livello del suolo richiesta dalla norma vale:

$$a_1^* = \frac{a_g \cdot S}{q} = \frac{0.138 \text{ g} \cdot 1.44}{2} = 0.099 \text{ g} \quad (17)$$

Per valutare invece l'accelerazione assoluta richiesta dalla norma nel caso in cui la struttura sia ubicata ad un piano alto di una costruzione deformabile, si deve preliminarmente calcolare i coefficienti elencati nelle Formule (18):

$$\begin{aligned} H &= 2.80 + 3.00 + 0.40 = 6.20 \text{ m} \\ T_1 &= C_1 \cdot H^{3/4} = 0.050 \cdot 6.20^{3/4} = 0.196 \text{ sec} \\ y_{GL} &= \frac{\sum I_i \cdot y_i}{\sum I_i} = \frac{1.00 \cdot 1.7677 + 1.00 \cdot 0}{1.00 + 1.00} = 0.884 \text{ m} \\ Z &= 0.40 + 3.00 + y_{GL} = 3.40 + 0.884 = 4.28 \text{ m} \\ \psi(Z) &= \frac{Z}{H} = \frac{4.28}{6.20} = 0.690 \\ \gamma &= \frac{3N}{2N+1} = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

Infine, per diagrammare lo spettro di risposta elastico (Fig. 4), occorre calcolare le ascisse dei tre punti che separano i quattro rami dello spettro. Quelli relativi all'esempio introduttivo sono riportati nelle Formule (19):

$$\begin{aligned} C_C &= 1.10 \cdot (T_C^*)^{-0.20} = 1.10 \cdot (0.294)^{-0.20} = 1.405 \\ T_C &= C_C T_C^* = 1.405 \cdot 0.294 = 0.413 \text{ sec} \\ T_B &= \frac{T_C}{3} = 0.137 \text{ sec} \\ T_D &= \frac{4.00 a_g}{6} + 1.6 = \\ &= \frac{4.00 \cdot 0.138 \text{ g}}{6} + 1.6 \text{ sec} = 2.152 \text{ sec} \end{aligned} \quad (19)$$

Poiché il primo periodo di vibrazione proprio della struttura ($T_1 = 0.196 \text{ sec}$) è compreso tra T_B e T_C , è possibile calcolare $S_e(T_1)$ sostituendo il valore di T_1 nella espressione che descrive il secondo tratto (orizzontale) dello spettro:

$$\begin{aligned} S_e(T_1) &= a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 = \\ &= 0.138 \text{ g} \cdot 1.44 \cdot 1 \cdot 2.414 = 0.480 \text{ g} \end{aligned} \quad (20)$$

Con riferimento alla Equazione (14), la domanda sismica riferita ad un piano alto della costruzione (quota di ubicazione dell'arco analizzato) vale:

$$\begin{aligned} a_2^* &= \frac{S_e(T_1) \cdot \psi(Z) \cdot \gamma}{q} = \\ &= \frac{0.480 \text{ g} \cdot 0.690 \cdot 1.0}{2} = 0.166 \text{ g} \end{aligned} \quad (21)$$

Tab. 2. Coefficienti relativi al suolo di fondazione assunto per l'esempio introduttivo.

	Descrizione	Categoria	Coefficiente di amplificazione
Sottosuolo	Terreni molto consistenti	B	$S_S = 1.20$
Topografia	Pendii con inclinazione $> 15^\circ$	T_2	$S_T = 1.2$

La verifica allo SLV impone che l'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo sia maggiore dell'accelerazione sismica prevista dalla normativa sul sito di costruzione, ossia che:

$$a_0^* \geq \max\{a_1^*, a_2^*\} \quad (22)$$

Nel caso specifico risulta:

$$0.039 \text{ g} < \max\{0.099 \text{ g}, 0.165 \text{ g}\} \quad (23)$$

Secondo l'Equazione (23), la verifica di sicurezza sismica dell'arco dell'esempio introduttivo non risulta soddisfatta.

5. Il Problema della Individuazione del Meccanismo di Collasso

Il punto più delicato dell'analisi sismica per mezzo della analisi cinematica sta nella definizione del meccanismo di collasso.

La scelta di un appropriato meccanismo di collasso consente infatti un calcolo attendibile per la capacità della struttura e quindi una valutazione idonea della sua vulnerabilità confrontando la capacità con la domanda sismica.

Nel caso di una parete monolitica (Fig. 5), rigida ed infinitamente resistente, e incastrata alla base, la scelta del meccanismo di collasso è banale: l'unica sezione suscettibile di dislocazioni è la sezione di terra. Il meccanismo più probabile è quello di ribaltamento attorno ad un punto (cerniera di rotazione) posto sulla sezione di base, che può attivarsi per mancanza di collegamenti trasversali [D'Ayala *et al.*, 2011].

La posizione esatta della cerniera lungo tale interfaccia non influisce sulla qualità del cedimento [Munari *et al.*, 2010], ma solo sul momento equilibrante prodotto dal peso del pilastro: si può ipotizzare la sua coincidenza con uno dei due punti estremi della sezione stessa (ipotesi di infinita resistenza a compressione del materiale costitutivo) così come si può anche pensare ad una sua posizione più interna (posizione che può essere ricavata sulla base di ipotesi di modelli di comportamento di tipo elasto-plastico).

Quando, invece, la struttura risulta costituita da più blocchi rigidi e infinitamente resistenti (quindi caratterizzata da blocchi non soggetti a rottura e solo le interfacce tra i blocchi possono divenire sedi di possibili dislocazioni), la scelta del meccanismo di collasso potrebbe essere fatta prevedendo tutte le configurazioni variate della struttura che risultino cinematicamente compatibili (cioè, che escludono il fenomeno, solo teoricamente possibile, della compenetrazione dei conci).

Alcuni autori [Baggio *et al.*, 1998, 2000; Block *et al.*, 2006; Smars, 2000] hanno proposto soluzioni relative alla valutazione della stabilità degli archi e alla ricerca

dei meccanismi che possono condurli al collasso, con procedimenti di natura cinematica. Secondo il *Teorema Cinematico dell'Analisi Limite* il moltiplicatore di collasso di una struttura corrisponde al minimo tra tutti i moltiplicatori di collasso che si ottengono dallo studio di tutti i possibili cinematismi che possono manifestarsi. Questa strada è rigorosa ma comporta un onere computazionale piuttosto impegnativo, perché è necessario formulare un'ampia gamma di catene cinematiche.

Per aggirare questo tipo di problema, in questa sezione dell'articolo, viene proposta una procedura numerica che segue un'altra metodologia, e ricerca il moltiplicatore di collasso per via statica. Facendo affidamento sul *Teorema Statico dell'Analisi Limite*, il moltiplicatore dei carichi capace di trasformare una struttura in un cinematismo è il più alto fra tutti quelli che garantiscono l'equilibrio della struttura. Dato che il *Teorema Fondamentale dell'Analisi Limite* afferma che il minimo moltiplicatore dei carichi ottenuto per via cinematica e il più alto moltiplicatore dei carichi ottenuto per via statica coincidono, vi è assoluta libertà di scelta della metodologia (statica o cinematica) per calcolarne il valore.

In questo lavoro, il problema della individuazione del meccanismo di collasso attivabile dal sisma, viene affrontato con l'approccio statico e risolto mediante un algoritmo per lo studio di strutture in muratura costituite da blocchi rigidi, connessi mediante giunti unilateri ed attritivi.

Questo algoritmo, presentato già in precedenti lavori con lo scopo di valutare la stabilità di strutture in muratura soggette a carichi verticali [Galassi *et al.*, 2004, 2012a], e a cedimenti vincolari [Galassi *et al.*, 2011, 2013a], viene presentato qui, in una forma aggiornata, per valutare la capacità sismica di archi a conci in muratura via analisi cinematica lineare. In tal modo sarà possibile individuare le quattro sezioni più deboli che durante l'evento sismico potranno diventare sedi di dislocazioni per formazione di cerniere di rotazione, considerando comunque la presenza di un attrito limitato tra i conci.

A tal proposito, si consideri, dunque, un arco costituito da n blocchi rigidi collegati mediante $m = n+1$ interfacce descritte in forma discreta mediante due bielle ortogonali all'interfaccia più una terza biella disposta in posizione tangente. Le due bielle ortogonali all'interfaccia vengono poste all'intradosso e all'estradosso della sezione rispettivamente ed hanno il compito di trasmettere la forza normale. La terza biella trasmette la forza di taglio (Fig. 6a). Le interfacce sono le uniche sezioni della struttura in cui possono avvenire le dislocazioni che possono portare all'attivazione o meno del meccanismo di collasso.

Con lo scopo di calcolare il valore del moltiplicatore di collasso e di individuare il relativo meccanismo, di tipo flessionale, attivabile da un terremoto, si impone che le bielle ortogonali siano capaci di trasmettere solo forze di compressione e che in presenza di forze di trazione si rompano, individuando la posizione di una cerniera di apertura. Quando si formano quattro cerniere di apertura in quattro distinte interfacce, la struttura si trasforma istantaneamente in un meccanismo di collasso. Inoltre, per scongiurare la possibilità di crisi locale di tipo "shear-type" (scorrimento), può risultare conveniente limitare il valore della forza di taglio che la biella tangente può trasmettere lungo l'interfaccia, adottando il noto criterio di resistenza proposto da Coulomb [Coulomb, 1776] nel '700 e che viene rap-

presentato mediante il cono di attrito interno [Galassi *et al.*, 2012b].

Qualora, anche in un solo giunto, la forza di taglio superi la forza limite di attrito, il meccanismo di collasso flessionale non potrà manifestarsi in quanto il numero delle sezioni di crisi in un arco può essere al massimo pari a quattro. Se in una delle quattro sezioni di crisi non si apre una cerniera perché accade prima una crisi locale di scorrimento, non vi sarà meccanismo flessionale alcuno.

Sulla base delle suddette ipotesi, il problema strutturale, così definito, necessita di una formulazione algebrica che consideri la non linearità di materiale (non resistenza a trazione e limitata resistenza al taglio) totalmente supposta concentrata nei giunti, dove appunto le dislocazioni possono avvenire (rotazione, scorrimento).

La formulazione algebrica (Fig. 6b), che governa il problema di un sistema discreto di blocchi rigidi collegati con vincoli unilateri, risulta così costituita da una equazione di equilibrio (più una eventuale equazione cinematica, che in questo contesto non necessita di essere risolta), e da un sistema di disequazioni mediante le quali è possibile descrivere la non linearità del materiale:

$$\begin{cases} AX = \alpha F \\ \bar{A}X = \delta \end{cases}, \quad \text{sub} \quad \begin{cases} X_n \leq 0 \\ X_t \leq f \cdot \sum_{i=1}^2 X_{n_i} \\ \delta \geq 0 \end{cases}, \quad (24)$$

dove:

- $[A]^{(3n \times 3m)}$ = matrice di equilibrio che dipende dalla geometria dell'arco;
- $[X]^{(3m \times 1)}$ = vettore incognito delle forze nelle bielle di interfaccia;
- $[X_n | X_t]$ = sotto-vettori di $[X]$ che contengono le forze normali e di taglio nelle bielle di interfaccia;
- $[F]^{(3n \times 1)}$ = vettore noto dei carichi;
- α = moltiplicatore delle forze, che assume il valore costante uguale ad 1 in corrispondenza dei coefficienti di $[F]$ che rappresentano i carichi verticali, ed uno specifico valore variabile in corrispondenza dei coefficienti di $[F]$ che rappresentano le azioni sismiche orizzontali. Questo valore viene incrementato progressivamente: per ogni valore di α , cioè per ogni passo della *procedura incrementale*, la struttura viene studiata con l'algoritmo illustrato ed è quindi in corrispondenza di ogni specifico α che vengono ricercate le eventuali cerniere. Queste, ovviamente, si manifestano in numero crescente, nelle soluzioni che corrispondono a moltiplicatori crescenti;
- f = coefficiente di attrito;
- $[x]^{(3m \times 1)}$ = vettore incognito delle componenti di spostamento dei baricentri dei conci;
- $[\delta]^{(3m \times 1)}$ = vettore incognito le cui componenti sono le *distorsioni interne* che sono necessarie per ottenere una soluzione capace di soddisfare le equazioni di equilibrio rispettando le condizioni di segno espresse dalle disequazioni. Si definisce distorsione qualsiasi azione esterna (che non sia una forza) capace di modificare la geometria originaria della struttura, e quindi di generare delle sollecitazioni interne in una struttura iperstatica [Gatto, F. *et al.*, 1983].

Data l'iperstaticità di questa tipologia strutturale, il numero delle incognite statiche (forze nelle bielle di interfaccia) è maggiore di tre rispetto al numero delle equazioni di equilibrio. Pertanto, per risolvere il problema strutturale sarebbe necessario descrivere anche

le condizioni di congruenza. Poiché, però, per ipotesi il materiale è stato dichiarato rigido (cioè non deformabile), queste ultime non possono essere scritte. Pertanto, il problema può essere affrontato nei soli termini dell'equilibrio.

Il set di distorsioni [Di Pasquale, 1998] viene fatto agire sulle bielle le cui forze non soddisfano le condizioni imposte dal materiale costitutivo. In dettaglio, prima viene ricavata la soluzione iniziale descritta nella Equazione (28) in forma vettoriale. Poi, se alcuni coefficienti del vettore della soluzione iniziale non soddisfano le disequazioni nel Sistema (24), vengono dapprima annullati tutti i valori delle forze di trazione nelle bielle normali, poi vengono ridotte quelle con forza di taglio più alta della forza di attrito. Nel primo caso vengono introdotte distorsioni δ in corrispondenza delle bielle ortogonali all'interfaccia con lo scopo di rendere nulle le forze di trazione (ciò produce la formazione di una cerniera di rotazione nell'interfaccia), nel secondo caso le distorsioni δ vengono introdotte in corrispondenza della biella tangente ed hanno lo scopo di ridurre la forza di taglio fino ad assumere il valore limite della forza di attrito per impedire lo scivolamento dei conci (comportamento "plastic-shearing" suggerito da Drucker [Gilbert et al., 1994], rappresentato in Fig. 7a). In ogni caso, il massimo numero di distorsioni che possono essere introdotte nel sistema non può essere superiore al grado di iperstaticità della struttura, come afferma il *Teorema di Colonnetti* [Colonnetti, 1955].

In generale, un problema iperstatico (di grado $3m - 3n$), ammette sempre ∞^{3m-3n} soluzioni equilibrate. Nel caso specifico, il problema dell'analisi strutturale dell'arco, sebbene iperstatico, ammette una sola soluzione, proprio in virtù delle distorsioni che vengono introdotte per il rispetto delle limitazioni imposte sui coefficienti del vettore $[X]$. Il problema, eventualmente, potrebbe essere quello che non è garantita l'esistenza della soluzione: tale caso corrisponde ad un arco instabile e quindi alla formazione di un meccanismo di collasso.

Alla soluzione del problema espresso nel Sistema (24) si può giungere scegliendo tra $(3m - 3n)$ infinità di soluzioni, una che soddisfi alcune condizioni o che sia, in un certo senso, la migliore. Considerando che il sistema $AX = \alpha F$ ammette soluzione $X = G \cdot \alpha F$ se e solo se $AG \cdot \alpha F = \alpha F$, dove $[G] \in R^{3m \times 3n}$ è una matrice tale da soddisfare la condizione $AGA = A$, la soluzione del sistema (24) è fornita da:

$$X = G \cdot \alpha F + (I - GA) \cdot \delta \quad (25)$$

dove $[\delta]$ è un arbitrario vettore di R^{3m} ed $[I]$ è la matrice identità di ordine $(3m \times 3m)$.

La matrice $[G]$ è una inversa generalizzata di $[A]$ [Penrose, 1955]; in genere essa non è unica e pertanto occorre sceglierla con qualche criterio. Qui è stata scelta l'inversa che fornisce una soluzione unica $[X_0]$ di minima 2-norma tale che:

$$\|X_0\|_2 = \min\{\|X\|_2 : AX = \alpha F = 0\} \quad (26)$$

La soluzione di minima norma è unica [Paradiso et al., 1992]. In questa circostanza la soluzione del Sistema (24) è fornita da:

$$X = X_0 + X_N \quad (27)$$

dove $[X_0] \in R(G)$ e $[X] \in N(A)$.

Il vettore soluzione di minima 2-norma è:

$$X_0 = \tilde{A}(A\tilde{A})^{-1}\alpha F \quad (28)$$

mentre:

$$X_N = (I - \tilde{A}(A\tilde{A})^{-1}A) \cdot \delta = C \cdot \delta \quad (29)$$

Nella Equazione (29), $[\delta]$ è un arbitrario vettore di R^{3m} , $[C] = (I - \tilde{A}(A\tilde{A})^{-1}A)$ è la proiezione ortogonale di R^{3n} su $N(A)$ ed $(I - \tilde{A}(A\tilde{A})^{-1}A) \cdot \delta$ è un arbitrario vettore di $N(A)$.

Il vettore arbitrario $[\delta]$ viene qui generalizzato per trovare $[X_N]$ che sommato a $[X_0]$ fornisce il vettore $[X]$ che soddisfa sia le equazioni che le disequazioni in (24).

La tecnica numerica per la soluzione del problema passa attraverso la ricerca delle distorsioni incognite δ e poi, conseguentemente, viene calcolato il vettore $[X]$. Dunque, riscrivendo l'Equazione (27) partizionando tutti i vettori e le matrici in modo da distinguere gli sforzi il cui segno è accettabile (pedice b), da quelli non accettabili (pedice c), si ottiene la forma matriciale seguente:

$$\begin{bmatrix} X_b \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ob} \\ X_{oc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b \\ B \\ C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_c \end{bmatrix} \quad (30)$$

che, risolta, fornisce i coefficienti del sottovettore $[\delta_c]$ delle distorsioni efficaci:

$$\delta_c = C_c^{-1}(L - X_{oc}) \quad (31)$$

Nella Equazione (31) il sottovettore $[\delta_c]$ è popolato dai coefficienti del sotto-insieme delle distorsioni che la struttura richiede, durante l'analisi, per ripristinare la compatibilità eventualmente non soddisfatta dal vettore della soluzione iniziale $[X_0]$, e quindi introdotte nel sistema per rispettare il vincolo non lineare che è stato imposto al materiale attraverso le disequazioni del Sistema (24).

Di conseguenza, il vettore completo delle distorsioni $[\delta]$ è:

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_c \end{bmatrix} \quad (32)$$

Infine viene ricavato il vettore finale della soluzione statica:

$$X_b = X_{ob} + BC_c^{-1}(L - X_{oc}) \quad (33)$$

Nella Equazione (33) il sottovettore X_b è popolato dai coefficienti delle forze interne non interessate direttamente dall'effetto delle distorsioni, ma che hanno comunque subito una alterazione numerica in conseguenza delle distorsioni applicate in corrispondenza di altre forze interne il cui segno non era accettabile.

Nell'ipotesi assunta di comportamento rigido-fragile nei confronti della forza normale ed rigido-plastico nei confronti del taglio, i coefficienti del sottovettore $[L]$, che compare nella Equazione (30), assumerà il valore 0 nel primo caso ed $f \cdot \sum_{i=1}^2 X_{n_i}$ nel secondo.

Il vettore finale completo della soluzione statica $[X]$ è dunque fornito dal sottovettore $[X_b]$ nella Equazione (33) e dal sottovettore $[L]$.

Con lo scopo di ricercare il moltiplicatore di collasso e il meccanismo corrispondente che il sisma sarà in grado di attivare, l'analisi verrà eseguita più volte (ogni

volta ripartendo da capo considerando la struttura nella sua configurazione iniziale), adottando valori crescenti del moltiplicatore dei carichi α (con un *procedimento incrementale* o, meglio, con il *metodo della bisezione*) fino a quando si manifesterà crisi in quattro interfacce, dove si formano le cerniere (che occupano una posizione opposta, intradosso o estradosso, rispetto alla posizione delle forze di trazione annullate ad ogni passo). Il valore del moltiplicatore di collasso α_0 di innesco del meccanismo risulta così univocamente determinato.

6. Il software SAV-SVM

L'algoritmo per la ricerca del meccanismo di collasso, presentato nelle pagine precedenti, è stato implementato nel codice di calcolo SAV-SVM [AEDES Software, 2000; Paradiso *et al.*, 2007].

Oltre all'analisi sismica condotta attraverso il procedimento cinematico, il software consente anche lo studio della stabilità di archi e volte in muratura, sia per carichi fissi che incrementali, e presenta i risultati del calcolo anche in forma grafica mediante il disegno della linea delle pressioni nella sagoma della struttura e i diagrammi delle sollecitazioni. Una applicazione della procedura numerica ad un caso reale è mostrata in [Galassi *et al.*, 2013b].

A titolo di esempio viene presentato lo studio di una volta a botte a tutto sesto a spessore variabile, posta al piano terra di un edificio storico costituito da due piani, ubicato nel comune di Firenze, FI, Italia, (LONG = 11.2499; LAT = 43.7874), ed adibito a sede comunale con destinazione ad archivio anagrafico (carico di esercizio pari a 8 kN/m² secondo la norma). In Fig. 8 viene rappresentata la sezione trasversale della volta, con indicazione delle quote ottenute dal rilievo geometrico.

Poiché lo spessore della volta del settore centrale (40 cm) è differente da quello dei due settori laterali (50 cm), non è stato possibile modellare direttamente in SAV la struttura come volta circolare. Perciò la volta è stata modellata come se fosse una ipotetica volta a tre centri (con tre centri coincidenti). Nel dettaglio, sono stati definiti tre settori elementari di raggio intradosso 3.25 m. Il primo settore è compreso tra i due giunti inclinati di 180° e 140° rispetto all'orizzontale, il secondo è compreso tra i due giunti inclinati di 140° e 40° e il terzo è compreso tra i 40° e 0°. L'intera struttura è stata discretizzata con conci di 60 cm di lunghezza, cioè in 18 conci.

I dati di input derivanti dalle indagini geometriche e materiche sono riportati in tabella 3.

Con SAV sono state eseguite due analisi statiche: la prima in relazione ai carichi permanenti (per appurare la stabilità della volta), la seconda con carichi verticali crescenti (per valutare il coefficiente di sicurezza). Successivamente è stata eseguita l'analisi sismica con procedimento cinematico.

La definizione delle azioni sulla costruzione è stata condotta in accordo ai requisiti della norma, per cui sono state dapprima definite due condizioni di carico elementari. Con la prima si è considerata la presenza di tutti i "Carichi Permanenti" (cioè il peso proprio della volta, del rinfianco, del sottofondo e del pavimento), con la seconda l'influenza dei "Carichi Variabili" (cioè il carico di esercizio dovuto al peso della carta) a cui deve essere applicato il coefficiente di combinazione

Tab. 3. *Dati di input.*

Materiale	Spessore [m]	Peso per unità di volume [kN/m ³]
Arco di pietrame	0.40–0.50	26.00
Rinfianco in coccio e calcinaccio	/	13.00
Sottofondo in malta	0.10	23.00
Pavimento di mattoni	0.15	18.00

Tab. 4. *Combinazioni delle condizioni di carico (CCC) per analisi statica.*

CCC		γ_G	ψ^Q
1	Carichi Permanenti + Carico variabile favorevole	1.00	0
2	Carichi Permanenti + Carico variabile sfavorevole	1.00	1.50

$\psi_2 = 0.80$ per la verifica sismica. I carichi variabili, come ovvio, sono gli unici carichi affetti da moltiplicatore per la ricerca del carico di collasso in direzione verticale in analisi statica.

L'analisi statica è stata effettuata due volte, con riferimento a due combinazioni statiche delle condizioni di carico, matematicamente formulate mediante l'uso di coefficienti parziali di sicurezza sulle azioni γ_G e γ_Q , rispettivamente riferiti ai carichi permanenti ed alle azioni variabili. La prima combinazione delle condizioni di carico ha considerato solo la presenza del peso proprio della struttura G_1 (volta) e dei carichi permanenti non strutturali G_2 (rinfianco, sottofondo, pavimento). La seconda ha considerato contemporaneamente ai carichi permanenti anche il carico di esercizio Q , cioè un carico variabile sfavorevole. Ai fini delle verifiche agli stati limite ultimi (equilibrio di corpo rigido), le due combinazioni dei carichi, espresse dalla Equazione (34), descrivono la "combinazione fondamentale allo SLU" in accordo alla NTC (§2.5.3, NTC 2008):

$$\gamma_{G1} \cdot G_1 + \gamma_{G2} \cdot G_2 + \gamma_{Q1} \cdot Q_{K1} + \gamma_{Q2} \cdot \psi_{Q2} \cdot Q_{K2} + \dots + \gamma_{Qn} \cdot \psi_{Qn} \cdot Q_{Kn} \quad (34)$$

in cui:

- G_1 : pesi propri di tutti gli elementi strutturali;
- G_2 : pesi propri di tutti gli elementi non strutturali;
- Q_{K1} : azione variabile dominante;
- Q_{K1}, \dots, Q_{Kn} : azioni variabili che possono agire contemporaneamente a quella dominante;
- γ_{G1} : coefficienti di sicurezza parziali del peso proprio della struttura (volta);
- γ_{G2} : coefficienti di sicurezza parziali dei pesi propri non strutturali (rinfianco, sottofondo, pavimento);
- γ_{Q1} : coefficienti di sicurezza parziali delle azioni variabili dominanti Q_{K1} ;
- γ_{Qj} : coefficienti di combinazione delle azioni variabili Q_{K2}, \dots, Q_{Kn} che possono agire contemporaneamente a quella dominante.

Nel caso in esame solo i primi tre addendi della Equazione (34) sono diversi da zero, in quanto è stata considerata una sola azione variabile dominante (carico di esercizio dovuto allo stoccaggio della carta). Le due combinazioni delle condizioni di carico assunte sono descritte in Tabella 4.

La Fig. 9 presenta, in forma grafica, la soluzione statica relativa alla seconda combinazione delle condizioni di carico ed evidenzia la posizione della linea delle

pressioni all'interno della sagoma della struttura. Ciò denuncia la condizione di stabilità della volta per carichi verticali, a fronte di un indebolimento della sezione di chiave nella quale la linea delle pressioni risulta in una posizione limite: tangente all'estradosso. Questo significa che la procedura numerica precedentemente descritta ha rilevato, nella soluzione statica iniziale, la presenza di forze di trazione all'intradosso di tale sezione ed ha provveduto ad eliminarle inserendovi una distorsione. Inoltre, il moltiplicatore di collasso ottenuto risulta molto alto (pari a 24.558) per cui la sicurezza della struttura nei confronti della variazione delle azioni verticali è garantita.

In analisi sismica cinematica, invece, è richiesta la definizione del meccanismo di collasso. Il calcolo è stato impostato sulla base della combinazione sismica delle condizioni di carico elementari richiesta dalla norma e descritta nella Equazione (35):

$$E + G_1 + G_2 + P + \psi_{21} \cdot Q_{K1} + \dots + \psi_{2n} \cdot Q_{Kn} \quad (35)$$

in cui, oltre ai simboli già descritti in precedenza, si trovano:

- E : azione sismica;
- P : pretensione e precompressione, che nel caso in esame sono zero;
- γ_{2j} : coefficienti di combinazione delle azioni variabili Q_{Kn} per combinazione sismica.

I risultati dell'analisi evidenziano la tendenza della struttura a crollare per attivazione di un meccanismo dovuto alla formazione di quattro cerniere (Fig. 10).

In corrispondenza di un moltiplicatore di collasso pari a $\alpha_0 = 0.127$, la capacità in termini di PGA risulta pari a $0.214g$, maggiore rispetto alla domanda sismica in termini di PGA ($0.157g$), per cui si conclude che la struttura analizzata è sicura nei confronti delle azioni sismiche.

Può essere significativo ripetere l'analisi adottando una discretizzazione più fitta della struttura. Passando, ad esempio, da un numero di elementi pari a 18 ad un numero pari a 218, è possibile osservare come i risultati sostanzialmente non cambino.

Il moltiplicatore di collasso per carichi verticali scende da 24.558 a 24.556 (variazione assolutamente priva di significato) mentre il moltiplicatore di collasso per azioni orizzontali (Fig. 11) scende da 0.127 a 0.117, e corrispondentemente la capacità in termini di PGA scende da $0.214g$ a $0.190g$, restando comunque ampiamente superiore alla domanda e mostrando una variazione pari a -11.2%, di fatto ininfluenza sulla verifica di sicurezza.

Questa circostanza evidenzia come il procedimento numerico formulato per l'analisi della stabilità degli archi e volte in muratura e per la stima della sicurezza sismica nei confronti dei meccanismi di collasso non sia affetto da problemi di dipendenza dalla discretizzazione e, nella veste del software SAV-SVM, costituisce un efficace strumento di supporto professionale per lo svolgimento delle verifiche di sicurezza di queste tipologie strutturali.

7. Conclusioni

In questo articolo è stato affrontato il tema della analisi sismica di archi e volte in muratura costituiti da

conci rigidi, mediante il procedimento della cinematica lineare nel rispetto delle norme italiane vigenti.

Un semplice esempio numerico è stato esposto passo dopo passo per fornire al lettore una guida di riferimento che descriva in modo chiaro le fasi fondamentali di tale approccio. Attraverso la descrizione numerica di un caso semplice, si è cercato di mettere il lettore in grado di reiterare il calcolo per applicazioni a casi concreti e quindi più complessi.

Poiché il tema più delicato del procedimento cinematico consiste nella definizione di un opportuno meccanismo di collasso rispetto al quale condurre la verifica sismica, un algoritmo numerico capace di individuare il moltiplicatore di collasso e il relativo meccanismo di crisi di tipo flessionale è stato descritto.

La procedura numerica attuale individua un meccanismo di collasso solo di tipo flessionale (cinematismo a quattro cerniere), in quanto il fenomeno dello scorrimento, del resto possibile in caso di carichi laterali [D'Ayala *et al.*, 2012], è stato considerato un fenomeno di crisi locale che impedisce la manifestazione completa del meccanismo. Così, viene continuamente monitorato il valore del taglio e mantenuto basso per impedire fenomeni di scorrimento (comportamento rigido-plastico). Di conseguenza, per la ricerca del meccanismo di collasso, nell'algoritmo è stato attivato solamente il controllo sulla forza di trazione, che una volta annullata, produce la formazione di una cerniera di rotazione.

Qualora, invece, si ritenga significativo considerare anche la possibilità di un meccanismo di tipo misto, dovuto cioè alla formazione di cerniere di rotazione in alcune interfacce e allo scorrimento in altre (interpretando quest'ultimo fenomeno come degradazione dell'originario vincolo di incastro interno che degenera in un doppio-pendolo), è possibile assumere per la biella tangente, nel modello meccanico del giunto, un comportamento di tipo "sliding-friction" (ipotesi alla Coulomb), secondo il quale, una volta che lo sforzo di taglio ha raggiunto il valore limite della forza di attrito, la forza di taglio diventa zero e l'elemento subisce uno scorrimento (Fig. 7b).

Nella procedura numerica, per attivare questo tipo di comportamento, è sufficiente imporre che le distorsioni che agiscono sulle bielle tangenti, quando necessario, abbiano il compito di annullare la forza di taglio che ha superato il valore della forza di attrito, invece di stabilizzarla sul valore limite. Tale operazione si concretizza numericamente assumendo per il sottovettore $[L]$ presente nella Equazione (30) il vettore nullo.

I risultati della ricerca scientifica degli autori e il codice di calcolo SAV-SVM che implementa la procedura numerica descritta sopra, si trovano all'indirizzo web: www.aedes.it.

8. Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare i Professori Michele Paradiso e Giacomo Tempesta (docenti di ruolo afferenti al Dipartimento di Architettura, Università di Firenze, Italia), autori dell'algoritmo originario che, concepito per valutare il grado di stabilità di una struttura voltata costituita da blocchi rigidi, è stato aggiornato, nella nuova forma presentata in questo lavoro, per individuare i meccanismi di collasso. In questo modo, le potenzialità dell'algoritmo sono aumentate perché

può così anche essere utilizzato per condurre l'analisi sismica secondo le modalità previste dalla attuale normativa tecnica italiana per le costruzioni. Un ringraziamento particolare va anche a Daniela Zerboni e Libby Lee, che si sono rese disponibili per la revisione di questo articolo.

9. Bibliografia

- AEDES Software [2000] "SAV: Stabilità di Archi e Volte in muratura"; "SVM: Sistemi Voltati in Muratura", software per il calcolo strutturale dei sistemi voltati, www.aedes.it.
- Alberti, L. A. [1966] *De Re Aedificatoria*, trad. G. Orlandi, note Paolo Portoghesi, Il Polifilo, Milano.
- Baggio, C. and Trovalusci, P. [1998] "Limit analysis for no-tension and frictional three-dimensional discrete systems", *Mechanics of Structures and Machines* **26(3)**, 287-384.
- Baggio, C. and Trovalusci, P. [2000] "Collapse behaviour of three-dimensional brick-block systems using non-linear programming", *Structural Engineering and Mechanics* **10(2)**, 1-15.
- Block, P., Ciblac, T. and Ochsendorf, C. [2006] "Real-time limit analysis of valuted masonry buildings", *Computers & Structures* **84(29-30)**, 1841-1852.
- Circolare [2009] No. 617, 02 Febbraio 2009, "Istruzioni per l'applicazione delle Nuove Norme Tecniche per le costruzioni", G.U. n. 47 del 26 Febbraio 2009.
- Colonnetti, G. [1955] *Scienza delle Costruzioni*, Edizioni Scientifiche Einaudi, Torino.
- Coulomb, C. A. [1776] *Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, et lus dans les Assemblées*, Académie Royale des Sciences, Paris.
- Couplet, C. A. [1731] *De la poussée des voutes*, Académie Royale des Sciences, Paris.
- Couplet, C. A. [1732] *Seconde partie de l'examen de la poussée des voutes*, Académie Royale des Sciences, Paris.
- D'Ayala, D. and Paganoni, S. [2011] "Assessment and analysis of damage in l'Aquila historic city centre after 6th April 2009", *Bulletin of Earthquake Engineering* **9**, 81-104.
- D'Ayala, D. and Ansal, A. [2012] "Non linear push over assessment of heritage buildings in Istanbul to define seismic risk", *Bulletin of Earthquake Engineering* **10**, 285-306.
- De Lorenzis, L., DeJong, M. and Ochsendorf, J. [2007] "Failure of masonry arches under impulse base motion", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* **36**, 2119-2136.
- Di Pasquale, S., [1998] "Masonry arches: Volterra's and Somigliana's dislocations", *Proc. of the II Arch Bridge Conference*, Venezia.
- D.M. LL. PP. [2008] 14 Gennaio 2008, "Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni (NTC)", G.U. n. 29 del 4 Febbraio 2008.
- Galassi, S., Paradiso M. and Tempesta, G. [2004] "A Numerical Method for No-tension Analysis of Masonry Arches", *Proc. of IV International Conference on Arch Bridges*, Barcellona, Spagna, 312-321.
- Galassi, S., Paradiso, M., Pieroni, E. and Tempesta, G. [2011] "Analisi di strutture in muratura soggette a vincoli cedevoli: un algoritmo di calcolo non lineare", *Proc. of XX Congresso Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata, AIMETA 2011*, Bologna, Italia, <http://www.lamc.ing.unibo.it/aimeta2011/>.
- Galassi, S., Paradiso, M. and Tempesta, G. [2012a] "X-Vaults: a Software for the Analysis of the Stability of Masonry Cross-Vaults", *Computer Science Issue (IJCSI)*, **9(2)**, 133-142.
- Galassi, S., Paradiso, M. and Tempesta, G. [2012b] "Un codice di calcolo per strutture in muratura a blocchi rigidi con giunti di tipo unilatero ed attritivo", *Proc. of Congresso AID Monuments – Conoscere, Progettare, Ricostruire*, Perugia, 483-492.
- Galassi, S., Paradiso, M. and Tempesta, G. [2013a] "Non-linear analysis of masonry structures subjected to external settlements", *Open Journal of Civil Engineering*, **3(2A)**, 18-26.
- Galassi, S., Paradiso, M., Tempesta, G. and Zerboni, D. [2013b] "The medieval bridge over the Rignalla brook near Florence: analysis and rehabilitation project", *International Journal EDA – Esempi di Architettura*, <http://www.esempidiarchitettura.it>.
- Gatto, F. and Ottolini, L. [1983] "Le dislocazioni nella teoria della frattura: da Volterra alla teoria delle dislocazioni superficiali", *Proc. of I Convegno Nazionale del Gruppo Frattura, IGF 1983*, Milano.
- Gilbert, M. and Melbourne, C. [1994] "Rigid-block analysis of masonry structures", *Structural Engineer*, **72(21)**, 356-360.
- Heyman, J. [1982] *The Masonry Arch*, Ellis Horwood Ltd., Chichester.
- Heyman, J. [1995] *The Stone Skeleton*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Munari, M., Bettiol, G., Da Porto, F., Milano, L. and Modena, C. [2010] *Esempio di calcolo su rafforzamento locale di edifici in muratura con tiranti*, Allegato alle "Linee Guida per la Riparazione e il Rafforzamento di Elementi Strutturali, Tamponature e Partizioni", Doppiavoce Edizioni.
- O'Dwyer, D. [1999] "Funicular analysis of masonry vaults", *Computers & Structure* **73**, 187-197.
- OPCM [2005] No. 3431, 3 Maggio 2005, "Ulteriori modifiche ed integrazioni all'OPCM 20 Marzo 2003 n. 3274, recante 'Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica'", G.U. n. 107 del 10 Maggio 2005.
- Paradiso, M., Tempesta, G., Briccoli Bati, S. [1992] "Un procedimento numerico per il calcolo di strutture in muratura", *Proc. of XI Congresso Nazionale AIMETA*, Trento, Italia, 127-132.
- Paradiso, M., Tempesta, G., Galassi, S., Pugi, F. [2007] *Sistemi Voltati in Muratura. Teoria e Applicazioni*, DEI Tipografia del Genio Civile, Roma.
- Penrose, R. [1955] "A generalized inverse for matrices", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51(3)**, 406-413.
- Smars, P. [2000] "Études sur la Stabilité des Arcs et Voutes", Ph.D. Dissertation, Catholic University in Leuven, Belgium.